Het PageRank-algoritme van Google

Marnix Van Daele

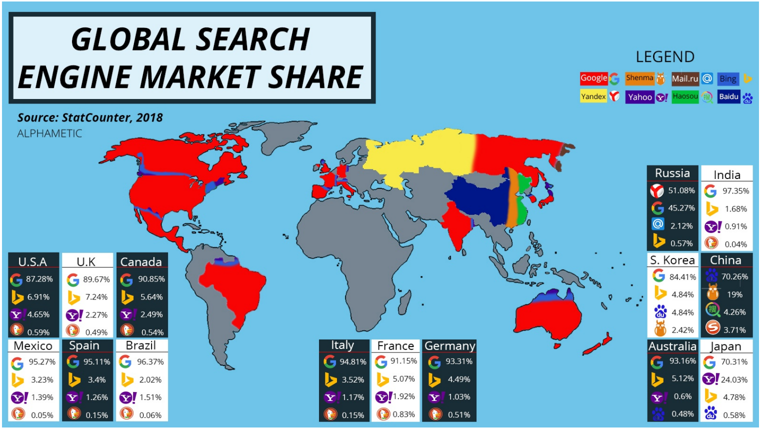
Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek
Universiteit Gent

8 februari 2023 - Campus Sterre - S9

Zoekmachines op het internet

Historisch overzicht Internet-zoekmachines 1990-2015

Marktaandeel zoekmachines wereldwijd



Google

- Google Inc. werd opgericht in 1996 door Larry Page (1973) en Sergey Brin (1973)

Tech-giganten

Google

10,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000 = 1 googol

- Eigenlijk zou het bedrijf "Googol" ($= 10^{100}$) heten, maar door een fout van een van de oprichters werd het Google.

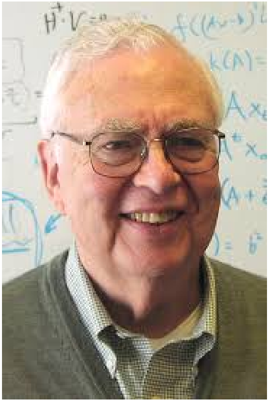
Google

- Het hoofdkantoor in Mountain View (Santa Clara county) California heet Googleplex, een woordspeling op googolplex ($= 10^{10^{100}}$)

PageRank

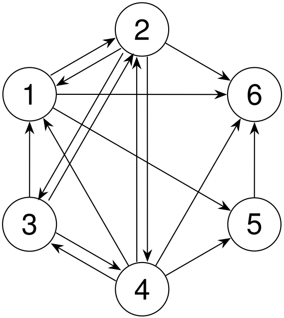
- PageRank is een methode om pagina's op het internet te ordenen naar belang
- Een hoge PageRank is een factor die meespeelt in de SERP ("Search engine results page").

PageRank



Het PageRank-algoritme werd ontwikkeld in 1998 door Page en Brin toen ze studeerden aan Stanford University.
Brin en Page werkten daarvoor samen met prof. Gene Golub, een autoriteit op het gebied van matrixberekeningen.

Het internet als een gerichte graaf

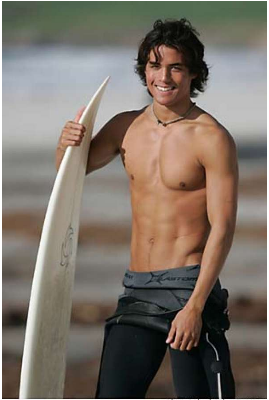


Het internet kan gemodelleerd worden door gigantische gerichte graaf, waarbij

- elke pagina door een knoop
- en elke link door een gerichte boog

wordt voorgesteld.

PageRank-berekening



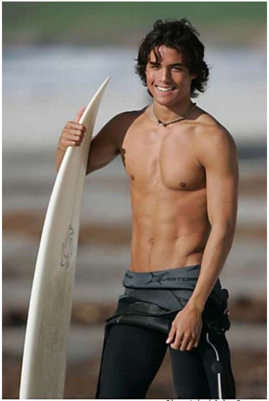
Chronicle / John Storey

De PageRank P_i van pagina i kan worden opgevat als de waarschijnlijkheid dat een surfer op deze pagina terechtkomt wanneer die surfer willekeurige hyperlinks aanklikt en af en toe een nieuwe pagina opvraagt.

Daarbij gebruiken Page en Brin de volgende formule (ook surfer-model genoemd):

$$\mathbf{P} = (d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T})\,\mathbf{P}$$

PageRank-berekening



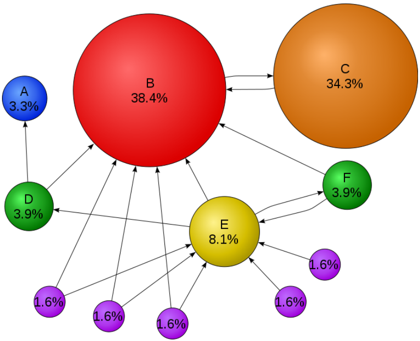
Chronicle / John Storey

De PageRank P_i van pagina i kan worden opgevat als de waarschijnlijkheid dat een surfer op deze pagina terechtkomt wanneer die surfer willekeurige hyperlinks aanklikt en af en toe een nieuwe pagina opvraagt.

Daarbij gebruiken Page en Brin de volgende formule (ook surfer-model genoemd):

$$\mathbf{P} = (d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T})\,\mathbf{P}$$

PageRank-berekening : $\mathbf{P} = (d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T})\,\mathbf{P}$



Idee van Page en Brin:

een pagina krijgt een hogere PageRank als er meer links van andere pagina's zijn waarbij het aantal links op die andere pagina's en de PageRank van die andere pagina's ook van belang zijn.

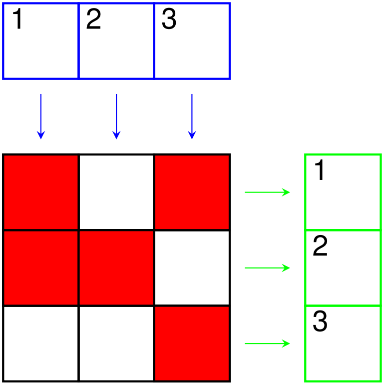
PageRank-berekening

Deze presentatie gaat over:

- wat betekent de formule $\mathbf{P} = (d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T})\,\mathbf{P}$?
- hoe wordt de oplossing berekend?

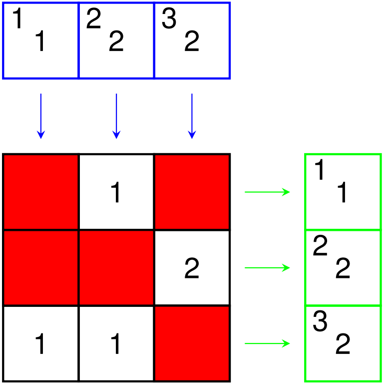
Goozzle: spelregels

- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de goozzle.



Goozzle: voorbeeld

- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de Goozzle.



Goozzle: voorbeeld

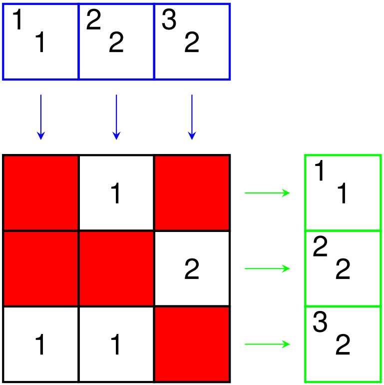
Merk op dat de oplossing slechts bepaald is op een veelvoud na:

is $(1, 2, 2)$ een oplossing, dan zijn ook $(2, 4, 4)$, $(3, 6, 6)$, $\ldots$ oplossingen.

Op dit veelvoud na is de oplossing uniek!

We kunnen bvb. kiezen voor de oplossing met kleinste natuurlijke getallen.

Staan we ook breuken toe, dan zouden we die oplossing kunnen kiezen waarvoor de som van de getallen 1 is.



Goozzle: voorbeeld

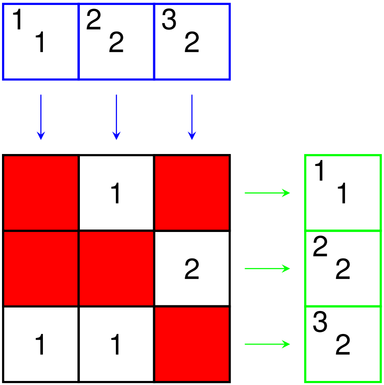
Merk op dat de oplossing slechts bepaald is op een veelvoud na:

is $(1, 2, 2)$ een oplossing, dan zijn ook $(2, 4, 4)$, $(3, 6, 6)$, $\ldots$ oplossingen.

Op dit veelvoud na is de oplossing uniek!

We kunnen bvb. kiezen voor de oplossing met kleinste natuurlijke getallen.

Staan we ook breuken toe, dan zouden we die oplossing kunnen kiezen waarvoor de som van de getallen 1 is.



Goozzle: voorbeeld

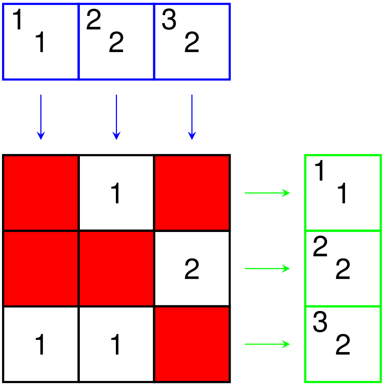
Merk op dat de oplossing slechts bepaald is op een veelvoud na:

is $(1, 2, 2)$ een oplossing, dan zijn ook $(2, 4, 4)$, $(3, 6, 6)$, $\ldots$ oplossingen.

Op dit veelvoud na is de oplossing uniek!

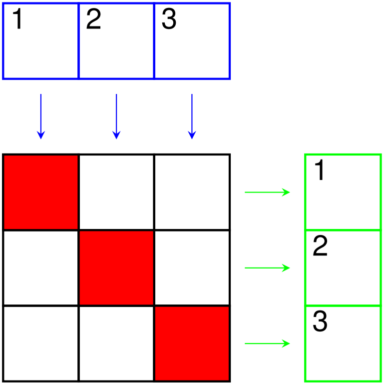
We kunnen bvb. kiezen voor de oplossing met kleinste natuurlijke getallen.

Staan we ook breuken toe, dan zouden we die oplossing kunnen kiezen waarvoor de som van de getallen 1 is.



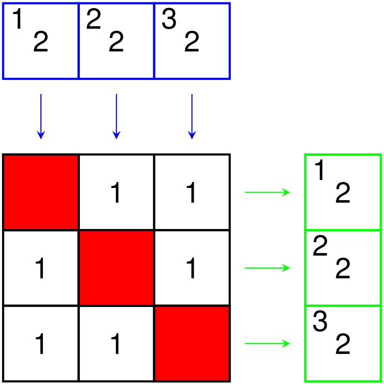
Goozzle 1

- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de Goozzle.



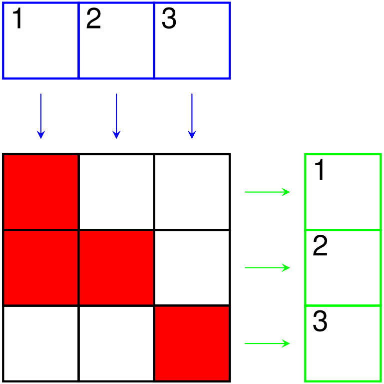
Goozzle 1

- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de Goozzle.



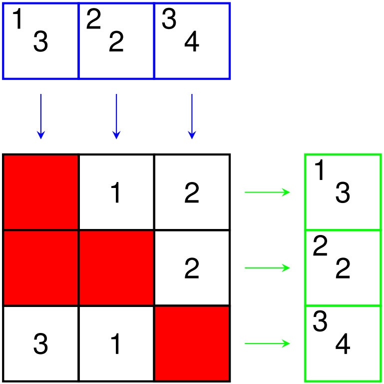
Goozzle 2

- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de Goozzle.



Goozzle 2

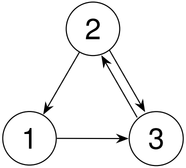
- Plaats positieve natuurlijke getallen in de blauwe vakjes.
- Verdeel elk getal in gelijke delen over de lege vakjes eronder.
- Tel de getallen per rij bij elkaar op en noteer de som in het groene vakje ernaast.
- Zijn de getallen in de groene vakjes dezelfde als in de blauwe vakjes en komen ze ook in dezelfde volgorde voor, dan heb je een oplossing gevonden van de Goozzle.



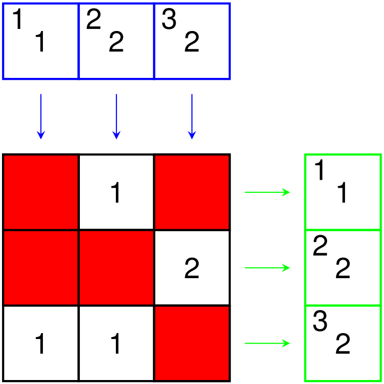
Van goozzle naar graaf

We tekenen een pijl van
pagina *i* naar pagina *j* indien
er een getal staat in kolom *i*, rij *j*.

Op die manier bekomen we
een gerichte graaf.



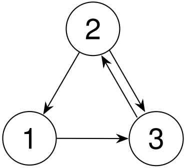
De oplossing van de goozzle
bevat (een veelvoud van) de
PageRanks
van de verschillende pagina's:
$P_1 = 1$ $P_2 = 2$ $P_3 = 2$

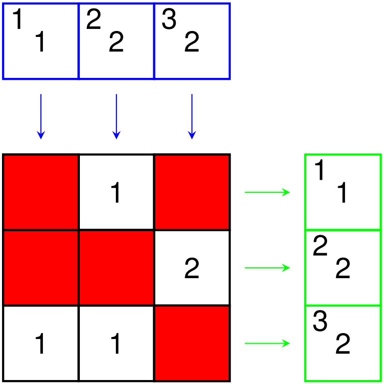


Van goozzle naar graaf

We tekenen een pijl van pagina *i* naar pagina *j* indien er een getal staat in kolom *i*, rij *j*.

Op die manier bekomen we een gerichte graaf.

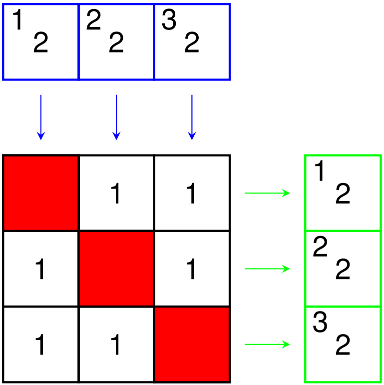




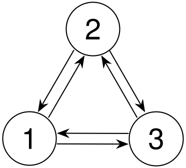
De oplossing van de goozzle bevat (een veelvoud van) de PageRanks van de verschillende pagina's:

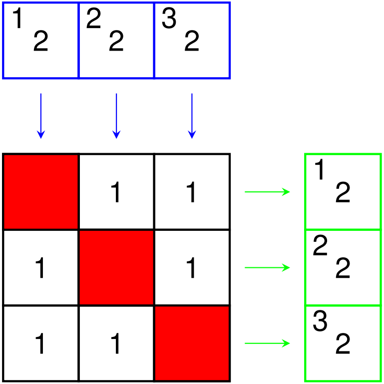
$P_1 = 1 \qquad P_2 = 2 \qquad P_3 = 2$

Graaf 1



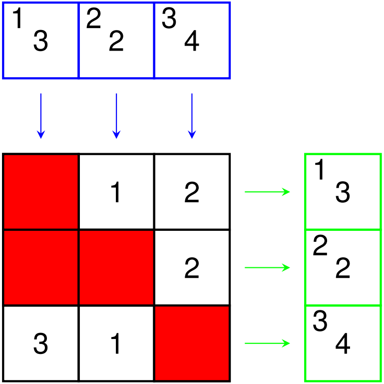
Graaf 1



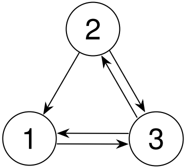


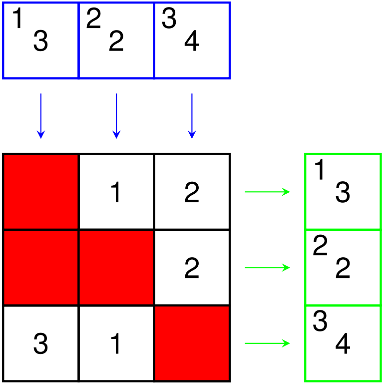
$P_1 = 2 \qquad P_2 = 2 \qquad P_3 = 2$

Graaf 2



Graaf 2





$P_1 = 3$ $P_2 = 2$ $P_3 = 4$

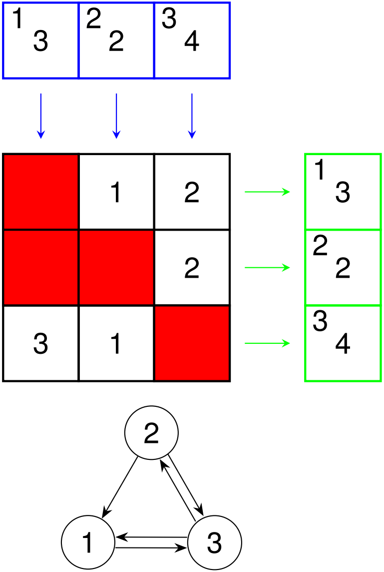
Van goozzle naar matrix

Bekijk de goozzle rij per rij:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{2}P_3 \\
P_3 &= P_1 + \frac{1}{2}P_2
\end{aligned}
$$

stel L_j: aantal links vanuit pagina j

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{L_2}P_2 + \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_3 &= \frac{1}{L_1}P_1 + \frac{1}{L_2}P_2
\end{aligned}
$$



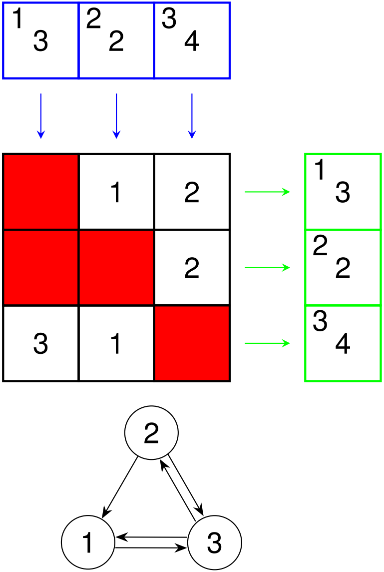
Van goozzle naar matrix

Bekijk de goozzle rij per rij:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{2}P_3 \\
P_3 &= P_1 + \frac{1}{2}P_2
\end{aligned}
$$

stel L_j: aantal links vanuit pagina j

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{L_2}P_2 + \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_3 &= \frac{1}{L_1}P_1 + \frac{1}{L_2}P_2
\end{aligned}
$$



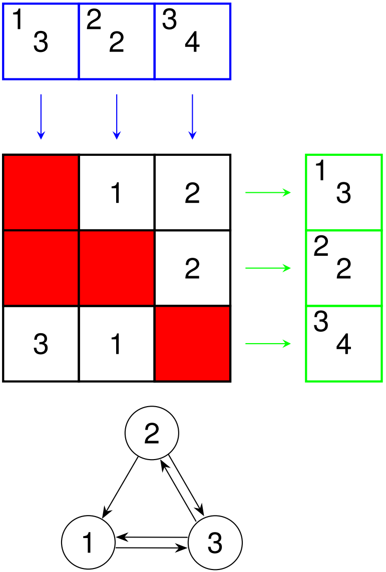
Van goozzle naar matrix

Bekijk de goozzle rij per rij:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{2}P_3 \\
P_3 &= P_1 + \frac{1}{2}P_2
\end{aligned}
$$

stel L_j: aantal links vanuit pagina j

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{L_2}P_2 + \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{L_3}P_3 \\
P_3 &= \frac{1}{L_1}P_1 + \frac{1}{L_2}P_2
\end{aligned}
$$

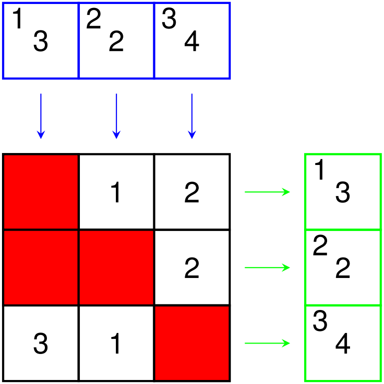


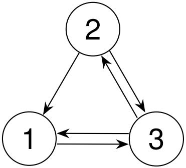
Van goozzle naar matrix

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{2}P_3 \\
P_3 &= P_1 + \frac{1}{2}P_2
\end{aligned}
$$

In matrix-vorm: $\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$

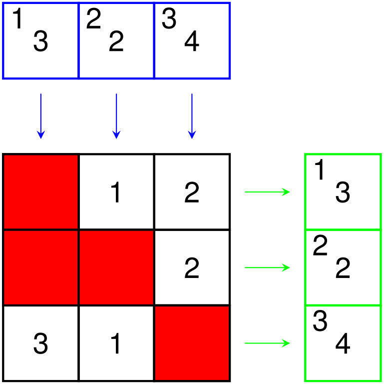
$$
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}
$$





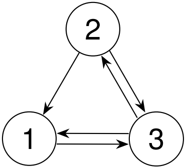
Van goozzle naar matrix

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\
P_2 &= \frac{1}{2}P_3 \\
P_3 &= P_1 + \frac{1}{2}P_2
\end{aligned}
$$



In matrix-vorm: $\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$

$$
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}
$$



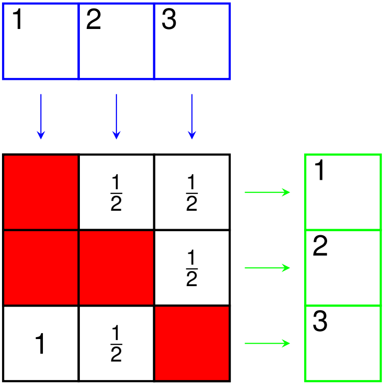
Van goozzle naar matrix

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$

De PageRanks kunnen dus (op een veelvoud na) berekend worden uit de matrixvergelijking $\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$ waarbij

- $\mathbf{P}$ een kolommatrix is waarbij P_i de PageRank van pagina i voorstelt
- $\mathbf{H}$ de webstructuurmatrix is

Merk op dat $\mathbf{H}$ een speciale structuur heeft:

- alle elementen van $\mathbf{H}$ liggen in $[0, 1]$
- per kolom zijn alle van 0 verschillende elementen gelijk
- de som van de elementen in elke kolom van $\mathbf{H}$ is 0 of 1.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$

De PageRanks kunnen dus (op een veelvoud na) berekend worden uit de matrixvergelijking $\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$ waarbij

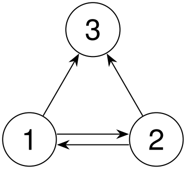
- **P** een kolommatrix is waarbij P_i de PageRank van pagina i voorstelt
- **H** de webstructuurmatrix is

Merk op dat **H** een speciale structuur heeft:

- alle elementen van **H** liggen in $[0, 1]$
- per kolom zijn alle van 0 verschillende elementen gelijk
- de som van de elementen in elke kolom van **H** is 0 of 1.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Dangling nodes



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

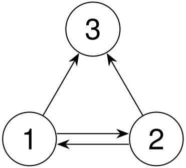
Na verloop van tijd komt een surfer uit bij pagina 3 ...
Lossen de vergelijkingen op, dan vinden we

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0$$

pagina 3 wijst nergens naar: het is een dangling node

Ongeveer 80 % van het internet bestaat uit dangling nodes.

Dangling nodes



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

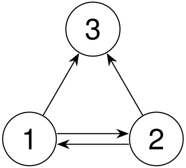
Na verloop van tijd komt een surfer uit bij pagina 3 ...
Lossen de vergelijkingen op, dan vinden we

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0$$

pagina 3 wijst nergens naar: het is een dangling node

Ongeveer 80 % van het internet bestaat uit dangling nodes.

Dangling nodes



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

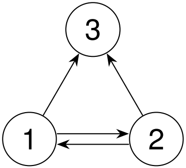
Na verloop van tijd komt een surfer uit bij pagina 3 ...
Lossen de vergelijkingen op, dan vinden we

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0$$

pagina 3 wijst nergens naar: het is een dangling node

Ongeveer 80 % van het internet bestaat uit dangling nodes.

Dangling nodes



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Na verloop van tijd komt een surfer uit bij pagina 3 ...
Lossen de vergelijkingen op, dan vinden we

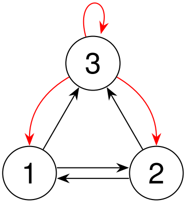
$$P_1 = P_2 = P_3 = 0$$

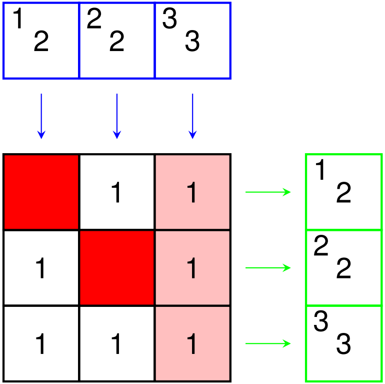
pagina 3 wijst nergens naar: het is een dangling node

Ongeveer 80 % van het internet bestaat uit dangling nodes.

De oplossing voor dangling nodes

Doe alsof elke dangling node naar elke andere pagina wijst.



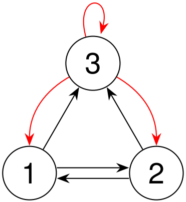


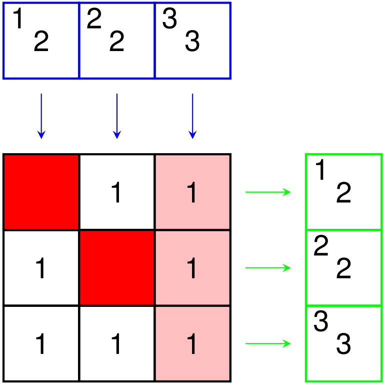
Achterliggend idee: teleportatie

Vanuit een dangling node wordt versprongen naar een willekeurige pagina.

De oplossing voor dangling nodes

Doe alsof elke dangling node naar elke andere pagina wijst.





Achterliggend idee: teleportatie

Vanuit een dangling node wordt versprongen naar een willekeurige pagina.

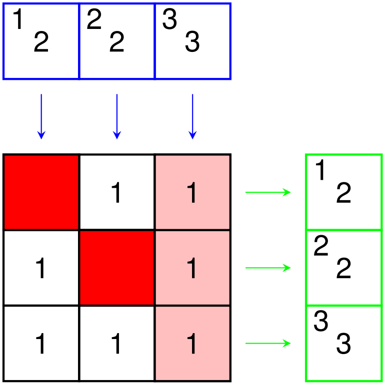
Teleportatie

Teleportatie is een term uit de science-fiction reeks Star Trek

"Beam me up, Scottie"

Teleportatie

We vervangen dus de matrix



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

door

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aanpassing: $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$

De PageRanks kunnen (op een veelvoud na) berekend worden uit $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$ waarbij

- $\mathbf{P}$ een kolommatrix is (en P_i de PageRank van pagina i is)
- $\mathbf{S}$ de aangepaste webstructuurmatrix is.

$\mathbf{S}$ heeft een speciale structuur:

- eig 1: alle elementen van $\mathbf{S}$ liggen in $[0, 1]$
- eig 2: per kolom zijn alle van 0 verschillende elementen gelijk
- eig 3: de som van de elementen in elke kolom van $\mathbf{S}$ is 1.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Een matrix met eig. 1 en eig. 3 is een stochastische matrix.

Aanpassing: $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$

De PageRanks kunnen (op een veelvoud na) berekend worden uit $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$ waarbij

- $\mathbf{P}$ een kolommatrix is (en P_i de PageRank van pagina i is)
- $\mathbf{S}$ de aangepaste webstructuurmatrix is.

$\mathbf{S}$ heeft een speciale structuur:

- eig 1: alle elementen van $\mathbf{S}$ liggen in $[0, 1]$
- eig 2: per kolom zijn alle van 0 verschillende elementen gelijk
- eig 3: de som van de elementen in elke kolom van $\mathbf{S}$ is 1.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Een matrix met eig. 1 en eig. 3 is een stochastische matrix.

Aanpassing: $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$

De PageRanks kunnen (op een veelvoud na) berekend worden uit $\mathbf{P} = \mathbf{S}\,\mathbf{P}$ waarbij

- $\mathbf{P}$ een kolommatrix is (en P_i de PageRank van pagina i is)
- $\mathbf{S}$ de aangepaste webstructuurmatrix is.

$\mathbf{S}$ heeft een speciale structuur:

- eig 1: alle elementen van $\mathbf{S}$ liggen in $[0, 1]$
- eig 2: per kolom zijn alle van 0 verschillende elementen gelijk
- eig 3: de som van de elementen in elke kolom van $\mathbf{S}$ is 1.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Een matrix met eig. 1 en eig. 3 is een stochastische matrix.

Stochastische matrices

Er bestaan twee soorten stochastische matrices:

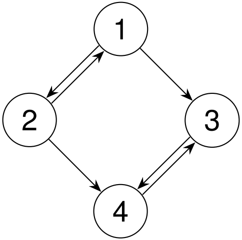
- bij kolomstochastische matrices is de som van de elementen in elke kolom 1:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- bij rijstochastische matrices is de som van de elementen in elke kolom 1:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

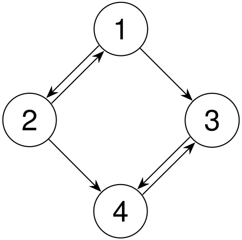
Teleportatie lost niet alle problemen op . . .



Na verloop van tijd komt de surfer bij pagina 3 of 4 uit, en hij kan niet terug naar pagina 1 of 2.

Dit zou betekenen dat $P_1 = P_2 = 0$, maar dat is niet aanvaardbaar.

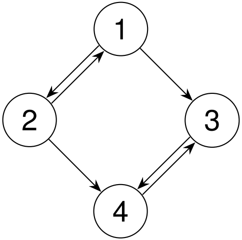
Teleportatie lost niet alle problemen op ...



Na verloop van tijd komt de surfer bij pagina 3 of 4 uit, en hij kan niet terug naar pagina 1 of 2.

Dit zou betekenen dat $P_1 = P_2 = 0$, maar dat is niet aanvaardbaar.

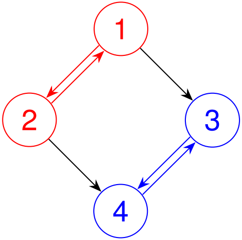
Teleportatie lost niet alle problemen op ...



Na verloop van tijd komt de surfer bij pagina 3 of 4 uit, en hij kan niet terug naar pagina 1 of 2.

Dit zou betekenen dat $P_1 = P_2 = 0$, maar dat is niet aanvaardbaar.

Teleportatie lost niet alle problemen op

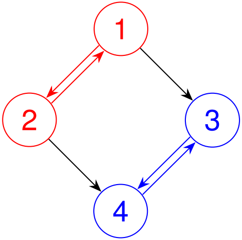


$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pagina's 3 en 4 vormen hier een rank sink :
Een rank sink is een deel van het web dat PageRank ontneemt aan een ander deel zonder iets terug te geven.

Teleportatie lost niet alle problemen op



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pagina's 3 en 4 vormen hier een rank sink :
Een rank sink is een deel van het web dat PageRank ontneemt aan een ander deel zonder iets terug te geven.

Globale teleportatie

Om het probleem van rank sink op te lossen, hebben Page en Brin de volgende heuristiek ingevoerd:

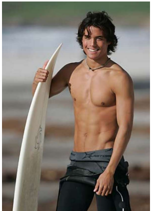
Een surfer zal een fractie d van zijn tijd hyperlinks volgen, en de resterende fractie $1 - d$ van de tijd via het intikken van een nieuw adres in de browser-balk naar een nieuwe, willekeurige, bestemming reizen (teleporteren).

Deze globale teleportatie kan voorgesteld worden door de stochastische $n \times n$ matrix $\mathbf{T}$, waarbij elk matrix-element dezelfde waarde $1/n$ heeft.

Dit leidt dan tot $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ waarbij

$$\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1 - d)\,\mathbf{T}$$

Google Inc. gebruikt $d \approx 0.85$



Globale teleportatie

Om het probleem van rank sink op te lossen, hebben Page en Brin de volgende heuristiek ingevoerd:

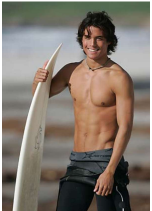
Een surfer zal een fractie d van zijn tijd hyperlinks volgen, en de resterende fractie $1 - d$ van de tijd via het intikken van een nieuw adres in de browser-balk naar een nieuwe, willekeurige, bestemming reizen (teleporteren).

Deze globale teleportatie kan voorgesteld worden door de stochastische $n \times n$ matrix $\mathbf{T}$, waarbij elk matrix-element dezelfde waarde $1/n$ heeft.

Dit leidt dan tot $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ waarbij

$$\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T}$$

Google Inc. gebruikt $d \approx 0.85$



Globale teleportatie

Om het probleem van rank sink op te lossen, hebben Page en Brin de volgende heuristiek ingevoerd:

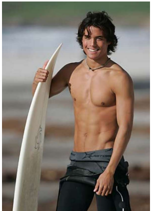
Een surfer zal een fractie d van zijn tijd hyperlinks volgen, en de resterende fractie $1 - d$ van de tijd via het intikken van een nieuw adres in de browser-balk naar een nieuwe, willekeurige, bestemming reizen (teleporteren).

Deze globale teleportatie kan voorgesteld worden door de stochastische $n \times n$ matrix $\mathbf{T}$, waarbij elk matrix-element dezelfde waarde $1/n$ heeft.

Dit leidt dan tot $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ waarbij

$$\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1 - d)\,\mathbf{T}$$

Google Inc. gebruikt $d \approx 0.85$



Globale teleportatie

Om het probleem van rank sink op te lossen, hebben Page en Brin de volgende heuristiek ingevoerd:

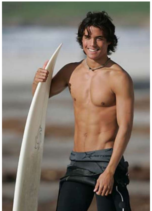
Een surfer zal een fractie d van zijn tijd hyperlinks volgen, en de resterende fractie $1 - d$ van de tijd via het intikken van een nieuw adres in de browser-balk naar een nieuwe, willekeurige, bestemming reizen (teleporteren).

Deze globale teleportatie kan voorgesteld worden door de stochastische $n \times n$ matrix $\mathbf{T}$, waarbij elk matrix-element dezelfde waarde $1/n$ heeft.

Dit leidt dan tot $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ waarbij

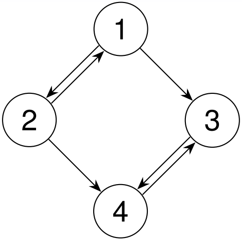
$$\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1 - d)\,\mathbf{T}$$

Google Inc. gebruikt $d \approx 0.85$



Voorbeeld

We bepalen de google-matrix **G** (met $d = 4/5$) en de corresponderende PageRanks voor het volgende voorbeeld:

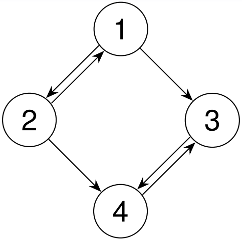


$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T} \\
&= \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{17}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Merk op dat ook **G** een stochastische matrix is!

Voorbeeld

We bepalen de google-matrix **G** (met $d = 4/5$) en de corresponderende PageRanks voor het volgende voorbeeld:

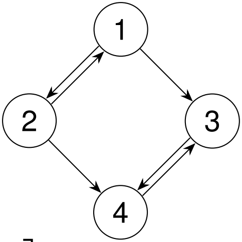


$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T} \\
&= \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{17}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Merk op dat ook **G** een stochastische matrix is!

Voorbeeld

We bepalen de google-matrix **G** (met $d = 4/5$) en de corresponderende PageRanks voor het volgende voorbeeld:



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{17}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Reken zelf na dat de oplossing **P** van $\mathbf{G}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}$ gegeven wordt door (veelvouden van)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Directe berekening van $\mathbf{P}$

Idee : herschrijf het probleem $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ als $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{0}$ met

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{I}$$

en pas de spilmethode toe . . .

Dit is een directe methode: in een eindig aantal stappen vind je de exacte oplossing.

Wat is de orde van de Google-matrix $\mathbf{G}$?

Of equivalent daarmee: hoeveel internetpagina's zijn er?

Volgens www.worldwidewebsize.com ongeveer 60.000.000.000

Een andere aanpak dringt zich op !

Directe berekening van $\mathbf{P}$

Idee : herschrijf het probleem $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ als $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{0}$ met

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{I}$$

en pas de spilmethode toe ...

Dit is een directe methode: in een eindig aantal stappen vind je de exacte oplossing.

Wat is de orde van de Google-matrix $\mathbf{G}$?

Of equivalent daarmee: hoeveel internetpagina's zijn er?

Volgens www.worldwidewebsize.com ongeveer 60.000.000.000

Een andere aanpak dringt zich op !

Directe berekening van $\mathbf{P}$

Idee : herschrijf het probleem $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ als $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{0}$ met

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{I}$$

en pas de spilmethode toe ...

Dit is een directe methode: in een eindig aantal stappen vind je de exacte oplossing.

Wat is de orde van de Google-matrix $\mathbf{G}$?

Of equivalent daarmee: hoeveel internetpagina's zijn er?

Volgens www.worldwidewebsize.com ongeveer 60.000.000.000

Een andere aanpak dringt zich op !

Directe berekening van $\mathbf{P}$

Idee : herschrijf het probleem $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ als $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{0}$ met

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{I}$$

en pas de spilmethode toe . . .

Dit is een directe methode: in een eindig aantal stappen vind je de exacte oplossing.

Wat is de orde van de Google-matrix $\mathbf{G}$?

Of equivalent daarmee: hoeveel internetpagina's zijn er?

Volgens www.worldwidewebsize.com ongeveer 60.000.000.000

Een andere aanpak dringt zich op !

Directe berekening van $\mathbf{P}$

Idee : herschrijf het probleem $\mathbf{P} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}$ als $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{0}$ met

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{I}$$

en pas de spilmethode toe . . .

Dit is een directe methode: in een eindig aantal stappen vind je de exacte oplossing.

Wat is de orde van de Google-matrix $\mathbf{G}$?

Of equivalent daarmee: hoeveel internetpagina's zijn er?

Volgens www.worldwidewebsize.com ongeveer 60.000.000.000

Een andere aanpak dringt zich op !

Iteratieve berekening van $\mathbf{P}$

Alternatieve methode: via een iteratief proces.

Vertrekkend van een willekeurige vector $\mathbf{P}^{(0)}$, berekenen we achtereenvolgens

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(0)} \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(1)} \quad \ldots \quad \mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(k)} \quad \ldots$$

Men kan daarbij aantonen dat $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}$

Dit is de machtmethode.

Iteratieve berekening van $\mathbf{P}$

Alternatieve methode: via een iteratief proces.
Vertrekkend van een willekeurige vector $\mathbf{P}^{(0)}$, berekenen we achtereenvolgens

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(0)} \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(k)} \quad \dots$$

Men kan daarbij aantonen dat $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}$

Dit is de machtmethode.

Iteratieve berekening van $\mathbf{P}$

Alternatieve methode: via een iteratief proces.
Vertrekkend van een willekeurige vector $\mathbf{P}^{(0)}$, berekenen we achtereenvolgens

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(0)} \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(1)} \quad \ldots \quad \mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(k)} \quad \ldots$$

Men kan daarbij aantonen dat $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}$

Dit is de machtmethode.

Iteratieve berekening van $\mathbf{P}$

Alternatieve methode: via een iteratief proces.
Vertrekkend van een willekeurige vector $\mathbf{P}^{(0)}$, berekenen we achtereenvolgens

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(0)} \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(1)} \quad \ldots \quad \mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{G}\,\mathbf{P}^{(k)} \quad \ldots$$

Men kan daarbij aantonen dat $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}$

Dit is de machtmethode.

De machtmethode: een illustratie

Voor $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{17}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$ is $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

k	${\mathbf{P}^{(k)}}^T$			
0	0.2951	0.3281	0.0460	0.3308
1	0.1812	0.1680	0.4327	0.2180
2	0.1172	0.1225	0.2969	0.4634
3	0.0990	0.0969	0.4676	0.3365
4	0.0888	0.0896	0.3588	0.4628
5	0.0858	0.0855	0.4558	0.3729
	⋮	⋮	⋮	⋮
48	0.0833	0.0833	0.4166	0.4167

De machtmethode: een illustratie

Voor $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{17}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$ is $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

k	$\mathbf{P}^{(k)\,T}$			
0	0.2951	0.3281	0.0460	0.3308
1	0.1812	0.1680	0.4327	0.2180
2	0.1172	0.1225	0.2969	0.4634
3	0.0990	0.0969	0.4676	0.3365
4	0.0888	0.0896	0.3588	0.4628
5	0.0858	0.0855	0.4558	0.3729
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
48	0.0833	0.0833	0.4166	0.4167

De machtmethode

Om de werking van de machtmethode te verklaren, doen we beroep op de begrippen eigenwaarden en eigenvectoren.

PageRank en eigenwaarden

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

1. Introduction. When Google went online in the late 1990's, one thing that set it apart from other search engines was that its search result listings always seemed deliver the "good stuff" up front. With other search engines you often had to wade through screen after screen of links to irrelevant web pages that just happened to match the search text. Part of the magic behind Google is its PageRank algorithm, which quantitatively rates the importance of each page on the web, allowing Google to rank the pages and thereby present to the user the more important (and typically most relevant and helpful) pages first.

Understanding how to calculate PageRank is essential for anyone designing a web page that they want people to access frequently, since getting listed first in a Google search leads to many people looking at your page. Indeed, due to Google's prominence as a search engine, its ranking system has had a deep influence on the development and structure of the internet, and on what kinds of information and services get accessed most frequently. Our goal in this paper is to explain one of the core ideas behind how Google calculates web page rankings. This turns out to be a delightful application of standard linear algebra.

Search engines such as Google have to do three basic things:

PageRank en eigenwaarden

The Second Eigenvalue of the Google Matrix

Taher H. Haveliwala and Sepandar D. Kamvar

Stanford University
{taherh,sdkamvar}@cs.stanford.edu

Abstract. We determine analytically the modulus of the second eigenvalue for the web hyperlink matrix used by Google for computing PageRank. Specifically, we prove the following statement:
"For any matrix $A = [cP + (1-c)E]^T$, where P is an $n \times n$ row-stochastic matrix, E is a nonnegative $n \times n$ rank-one row-stochastic matrix, and $0 \leq c \leq 1$, the second eigenvalue of A has modulus $|\lambda_2| \leq c$. Furthermore, if P has at least two irreducible closed subsets, the second eigenvalue $\lambda_2 = c$."
This statement has implications for the convergence rate of the standard PageRank algorithm as the web scales, for the stability of PageRank to perturbations to the link structure of the web, for the detection of Google spammers, and for the design of algorithms to speed up PageRank.

1 Theorem

Theorem 1. *Let P be an $n \times n$ row-stochastic matrix. Let c be a real number such that $0 \leq c \leq 1$. Let E be the $n \times n$ rank-one row-stochastic matrix $E = \mathbf{e}\mathbf{v}^T$, where $\mathbf{e}$ is the n-vector whose elements are all $e_i = 1$, and $\mathbf{v}$ is an n-vector that represents a probability distribution*[1].
Define the matrix $A = [cP + (1-c)E]^T$. Its second eigenvalue $|\lambda_2| \leq c$.

Theorem 2. *Further, if P has at least two irreducible closed subsets (which is the case for the web hyperlink matrix), then the second eigenvalue of A is given by $\lambda_2 = c$.*

Eigenwaarden en eigenvectoren

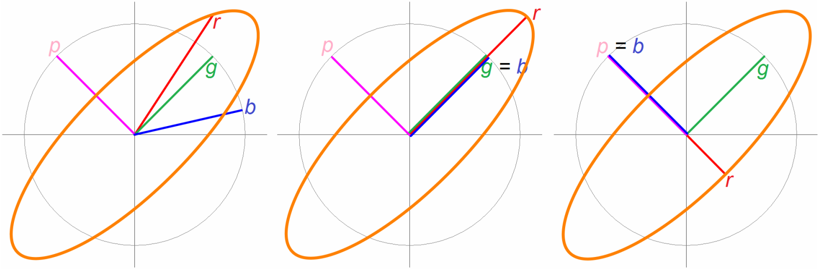
- Gegeven een $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, bepaal de getallen λ en de vectoren $\mathbf{x}$ (met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) zodat

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

- λ is een eigenwaarde en $\mathbf{x}$ is de bijhorende eigenvector
- λ kan complex zijn, zelfs al is $\mathbf{A}$ reëel
- eigenvectoren zijn slechts op een veelvoud na bepaald

Eigenwaarden en eigenvectoren: interpretatie

$$\text{Voorbeeld: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwaarden en eigenvectoren: berekening

$$\text{Zij } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Dit stelsel heeft een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a.s.a.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0\,.$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Eigenwaarden en eigenvectoren: berekening

$$\text{Zij } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a.s.a.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0\,.$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Eigenwaarden en eigenvectoren: berekening

Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Dit stelsel heeft een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a.s.a.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0\,.$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Karakteristieke veelterm

- $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \Longleftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Dit stelsel heeft een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a.s.a.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0$$

- Merk op: $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^T$ hebben dezelfde eigenwaarden!
- Dit is een vergelijking van graad n in λ:

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + c_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \cdots + c_0$$

- Elke matrix van orde n heeft n eigenwaarden die reëel of complex kunnen zijn en al of niet kunnen samenvallen.

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = -1$?

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = -1$?

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = -1$?

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = -1$?

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = -1$?

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \lambda\,(\lambda - 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \lambda\,(\lambda - 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \lambda\,(\lambda - 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn de nulpunten van

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \lambda\,(\lambda - 1) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = 0$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = 0$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = 0$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = 0$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2

De eigenwaarden van

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_1$ horend bij $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wat is de eigenvector $\mathbf{x}_2$ horend bij $\lambda_2 = 0$?

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Eigenwaarden van stochastische matrices

- Een stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$.
- Is λ een eigenwaarde van een reële stochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$.

Als we dit kunnen aantonen voor rij-stochastische matrices, dan geldt het ook voor kolom-stochastische matrices. Immers

- elke kolom-stochastische matrix is de getransponeerde van een rij-stochastische matrix
- we weten al dat de getransponeerde matrix dezelfde eigenwaarden heeft als de oorspronkelijke matrix.

Eigenwaarden van stochastische matrices

- Een stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$.
- Is λ een eigenwaarde van een reële stochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$.

Als we dit kunnen aantonen voor rij-stochastische matrices, dan geldt het ook voor kolom-stochastische matrices. Immers

- elke kolom-stochastische matrix is de getransponeerde van een rij-stochastische matrix
- we weten al dat de getransponeerde matrix dezelfde eigenwaarden heeft als de oorspronkelijke matrix.

Eigenwaarden van stochastische matrices

- Een stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$.
- Is λ een eigenwaarde van een reële stochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$.

Als we dit kunnen aantonen voor rij-stochastische matrices, dan geldt het ook voor kolom-stochastische matrices. Immers

- elke kolom-stochastische matrix is de getransponeerde van een rij-stochastische matrix
- we weten al dat de getransponeerde matrix dezelfde eigenwaarden heeft als de oorspronkelijke matrix.

Een rij-stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$

Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ een rij-stochastische matrix,

dan is de som van de elementen per rij van **A** steeds 1:

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = 1 \,.$$

Dit kan geschreven worden als

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit drukt precies uit dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van **A**.

Een rij-stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$

Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ een rij-stochastische matrix,
dan is de som van de elementen per rij van **A** steeds 1:

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = 1\,.$$

Dit kan geschreven worden als

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit drukt precies uit dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van **A**.

Een rij-stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$

Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ een rij-stochastische matrix,
dan is de som van de elementen per rij van **A** steeds 1:

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = 1\,.$$

Dit kan geschreven worden als

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit drukt precies uit dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van **A**.

Een rij-stochastische matrix heeft altijd een eigenwaarde $\lambda = 1$

Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ een rij-stochastische matrix,
dan is de som van de elementen per rij van **A** steeds 1:

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = 1\,.$$

Dit kan geschreven worden als

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit drukt precies uit dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van **A**.

Is λ een eigenwaarde van een reële rijstochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$

Zij $\mathbf{A}$ een rijstochastische matrix waarbij $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Zij $v_k \neq 0$ de grootste (in modulus) component van $\mathbf{v}$, dan geldt voor de k-de rij $a_{k1}v_1 + a_{k2} + \dots a_{kn}v_n = \lambda v_k$, zodat

$$\begin{aligned} |\lambda||v_k| = |\lambda v_k| &\leq |a_{k1}v_1| + |a_{k2}v_2| + \dots + |a_{kn}v_n| \\ &= a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \dots + a_{kn}|v_n| \\ &\leq (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn})|v_k| \\ &= |v_k| \end{aligned}$$

zodat $|\lambda||v_k| \leq |v_k|$, waaruit $|\lambda| \leq 1$.

Is λ een eigenwaarde van een reële rijstochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$

Zij **A** een rijstochastische matrix waarbij $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Zij $v_k \neq 0$ de grootste (in modulus) component van $\mathbf{v}$, dan geldt voor de k-de rij $a_{k1}v_1 + a_{k2} + \dots a_{kn}v_n = \lambda v_k$, zodat

$$\begin{aligned} |\lambda||v_k| = |\lambda v_k| &\leq |a_{k1}v_1| + |a_{k2}v_2| + \dots + |a_{kn}v_n| \\ &= a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \dots + a_{kn}|v_n| \\ &\leq (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn})|v_k| \\ &= |v_k| \end{aligned}$$

zodat $|\lambda||v_k| \leq |v_k|$, waaruit $|\lambda| \leq 1$.

Is λ een eigenwaarde van een reële rijstochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$

Zij **A** een rijstochastische matrix waarbij $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Zij $v_k \neq 0$ de grootste (in modulus) component van **v**, dan geldt voor de k-de rij $a_{k1}v_1 + a_{k2} + \dots a_{kn}v_n = \lambda v_k$, zodat

$$\begin{aligned} |\lambda||v_k| = |\lambda v_k| &\leq |a_{k1}v_1| + |a_{k2}v_2| + \dots + |a_{kn}v_n| \\ &= a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \dots + a_{kn}|v_n| \\ &\leq (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn})|v_k| \\ &= |v_k| \end{aligned}$$

zodat $|\lambda||v_k| \leq |v_k|$, waaruit $|\lambda| \leq 1$.

Is λ een eigenwaarde van een reële rijstochastische matrix, dan is $|\lambda| \leq 1$

Zij **A** een rijstochastische matrix waarbij $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Zij $v_k \neq 0$ de grootste (in modulus) component van **v**, dan geldt voor de k-de rij $a_{k1}v_1 + a_{k2} + \dots a_{kn}v_n = \lambda v_k$, zodat

$$\begin{aligned} |\lambda||v_k| = |\lambda v_k| &\leq |a_{k1}v_1| + |a_{k2}v_2| + \dots + |a_{kn}v_n| \\ &= a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \dots + a_{kn}|v_n| \\ &\leq (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn})|v_k| \\ &= |v_k| \end{aligned}$$

zodat $|\lambda||v_k| \leq |v_k|$, waaruit $|\lambda| \leq 1$.

De machtmethode

- De eenvoudigste methode om alleen de in modulus grootste eigenwaarde en bijhorende eigenvector te berekenen is de machtmethode
- Veronderstel dat de eigenwaarden van **A** kunnen genummerd worden als λ_1, λ_2,..., λ_n, waarbij

  $$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

  en stel dat $\mathbf{v}_1$ een eigenvector is horend bij de dominante eigenwaarde λ_1
- Vertrekkend van de startvector $\mathbf{x}_0$ convergeert het iteratieschema

  $$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1}$$

  naar een veelvoud van de eigenvector $\mathbf{v}_1$ (wat bedoeld wordt is dat de richting van $\mathbf{x}_k$ convergeert naar deze van $\mathbf{v}_1$)

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 &= d_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1^2\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^2\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

zodat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}_0 = d_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

of ook

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k\left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_n\right)\right]$$

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 &= d_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1^2\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^2\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

zodat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}_0 = d_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

of ook

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \ldots + d_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n \right) \right]$$

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 &= d_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1^2\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^2\,\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

zodat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}_0 = d_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

of ook

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \ldots + d_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n \right) \right]$$

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 &= d_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1^2\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^2\,\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

zodat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}_0 = d_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

of ook

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \ldots + d_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n \right) \right]$$

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 &= d_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 &= d_1\,\lambda_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n \\ &= d_1\,\lambda_1^2\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^2\,\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

zodat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}_0 = d_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

of ook

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2\,\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\,\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n \right) \right]$$

Machtiteratie

- Immers, als $\mathbf{x}_0 = d_1\,\mathbf{v}_1 + d_2\,\mathbf{v}_2 \ldots + d_n\,\mathbf{v}_n$ waarbij $\mathbf{v}_i$ eigenvectoren zijn van $\mathbf{A}$, dan is

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[d_1\,\mathbf{v}_1 + \left(d_2\, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n \right) \right]$$

- Vermits $|\lambda_n/\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_3/\lambda_1| \leq |\lambda_2/\lambda_1| < 1$ worden, voor voldoend grote k, de termen tussen ronde haken verwaarloosbaar klein, zodat

$$\mathbf{x}_k \approx \lambda_1^k\, d_1\,\mathbf{v}_1$$

De machtmethode voor stochastische matrices

Voor een willekeurige stochastische matrix geldt

$$1 = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| .$$

De machtmethode

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\, \mathbf{x}_{k-1}$$

werkt dus alleen voor stochastische matrices waarvoor $|\lambda_2| < 1$.
Maar er is nog een bijkomende stelling …

De machtmethode voor stochastische matrices

Voor een willekeurige stochastische matrix geldt

$$1 = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| .$$

De machtmethode

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1}$$

werkt dus alleen voor stochastische matrices waarvoor $|\lambda_2| < 1$.

Maar er is nog een bijkomende stelling ...

De machtmethode voor stochastische matrices

Voor een willekeurige stochastische matrix geldt

$$1 = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| .$$

De machtmethode

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1}$$

werkt dus alleen voor stochastische matrices waarvoor $|\lambda_2| < 1$.

Maar er is nog een bijkomende stelling ...

De machtmethode voor stochastische matrices

Voor een willekeurige stochastische matrix geldt

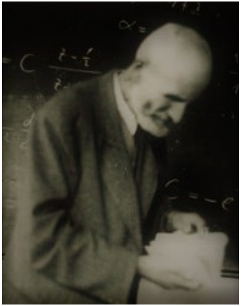
$$1 = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \,.$$

De machtmethode

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1}$$

werkt dus alleen voor stochastische matrices waarvoor $|\lambda_2| < 1$.
Maar er is nog een bijkomende stelling ...

Stelling van Perron - Frobenius



Perron (1907) en Frobenius (1912) toonden onafhankelijk van elkaar aan:

Een reële vierkante matrix met allemaal positieve matrixelementen heeft steeds een unieke (in modulus) grootste reële eigenwaarde en de bijhorende eigenvector kan zo gekozen worden dat alle componenten strikt positief zijn.

Eigenwaarden van stochastische matrices waarbij alle elementen positief zijn

Men kan hiervoor bijgevolg aantonen dat

- er steeds een eigenwaarde gelijk aan 1 is (en de bijhorende eigenvector heeft allemaal positieve componenten)
- alle andere eigenwaarden een modulus hebben die kleiner is 1 is.

Voor een stochastische matrix met allemaal positieve elementen geldt dus

$$1 = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| .$$

De machtmethode werkt dus steeds voor stochastische matrices met allemaal positieve elementen!

De machtmethode en de Google-matrix $\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T}$

De omvorming van $\mathbf{S}$ naar $\mathbf{G} = d\,\mathbf{S} + (1-d)\,\mathbf{T}$ zorgt er dus voor dat de machtmethode steeds tot de oplossing leidt.

Bovendien:

hoe kleiner d gekozen wordt, hoe kleiner de verhouding $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ wordt en hoe sneller de machtmethode convergeert.

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet . . .

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet . . .

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet ...

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet ...

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet . . .

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump

Waarover hebben we het niet gehad?

De vuile truken van het internet ...

- link-building (linkopbouw) is het (doen laten) genereren van links vanaf externe webpaginas naar een specifieke website, met het doel een hogere waardering voor een zoekmachine zoals Google te behalen op voor die webpagina relevante trefwoorden.
- google-bommen is een manier om een bepaalde pagina hoog op de resultatenlijst van deze zoekmachine te laten verschijnen, bij woorden die niet in overvloed op die pagina voorkomen.
  - "‘miserable failure" leidde naar George Bush
  - "lul" leidde naar Hugo Coveliers
  - "asshole" of "golden shower" leidde tot Donald Trump