Fourieranalyse en compressie van geluiden en beelden

Unimath — Universiteit Gent

Hans Vernaeve

UNIVERSITEIT GENT

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?
- Hoe werkt een JPEG-bestand?

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?
- Hoe werkt een JPEG-bestand?
- Hoe werkt JPEG-compressie?

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?
- Hoe werkt een JPEG-bestand?
- Hoe werkt JPEG-compressie?
- MP3 en JPEG steunen op een ontbinding in *frequenties*.

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?
- Hoe werkt een JPEG-bestand?
- Hoe werkt JPEG-compressie?
- MP3 en JPEG steunen op een ontbinding in *frequenties*.
- Hoe kunnen we een geluid/afbeelding ontbinden in zulke frequenties?

Doel

- Hoe werkt een MP3-speler?
- Hoe kan een MP3-bestand van 1MB een minuut aan muziek bevatten?
- Hoe werkt een JPEG-bestand?
- Hoe werkt JPEG-compressie?
- MP3 en JPEG steunen op een ontbinding in *frequenties*.
- Hoe kunnen we een geluid/afbeelding ontbinden in zulke frequenties?
- Dankzij wiskunde!

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht (demo, applet 1)

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht

Vraag

Wat ervaren we als een geluidsgolf ons oor met de *halve snelheid* bereikt?

(demo 2,3)

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht

Interpretatie door het menselijk gehoor:

Periodiek geluid	(=zichzelf herhalend)	$\rightarrow$	toon
Intensiteit	(=sterkte van de uitwijking)	$\rightarrow$	geluidssterkte

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht

Interpretatie door het menselijk gehoor:

Periodiek geluid	(=zichzelf herhalend)	$\rightarrow$	toon
Intensiteit	(=sterkte van de uitwijking)	$\rightarrow$	geluidssterkte
Frequentie	(=aantal trillingen/sec)	$\rightarrow$	toonhoogte

Geluid

Geluidsgolven = trilling van de lucht

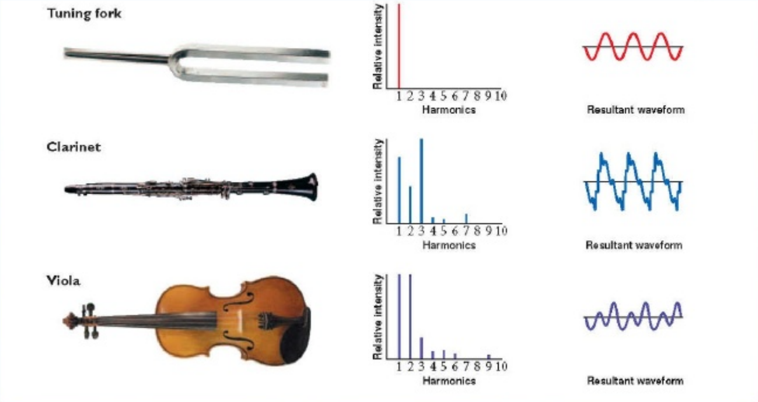
Interpretatie door het menselijk gehoor:

Periodiek geluid	(=zichzelf herhalend)	$\rightarrow$	toon
Intensiteit	(=sterkte van de uitwijking)	$\rightarrow$	geluidssterkte
Frequentie	(=aantal trillingen/sec)	$\rightarrow$	toonhoogte
Profiel	(=vorm van de uitwijking)	$\rightarrow$	klankkleur (applet 4)

Zuivere tonen: sinus en cosinus

(applet 5)

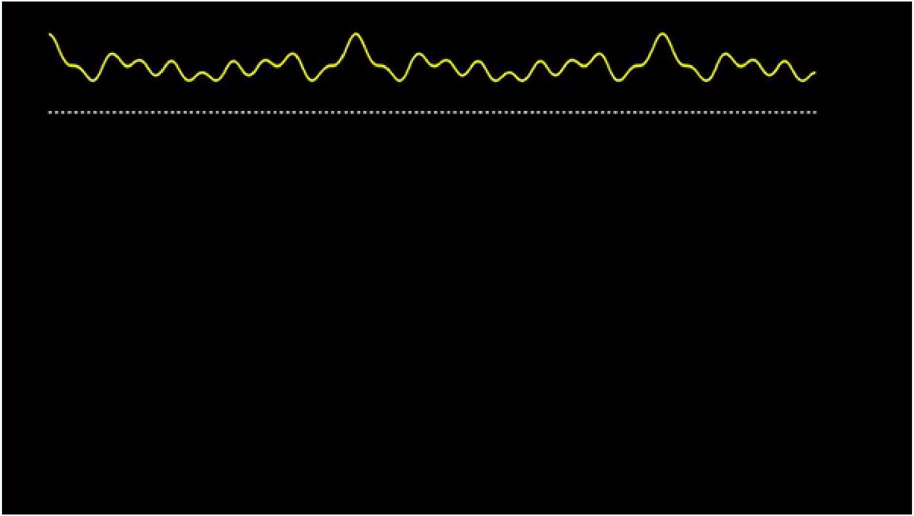
Samengestelde tonen



Van frequentie-spectrum naar geluidsgolf: superpositie

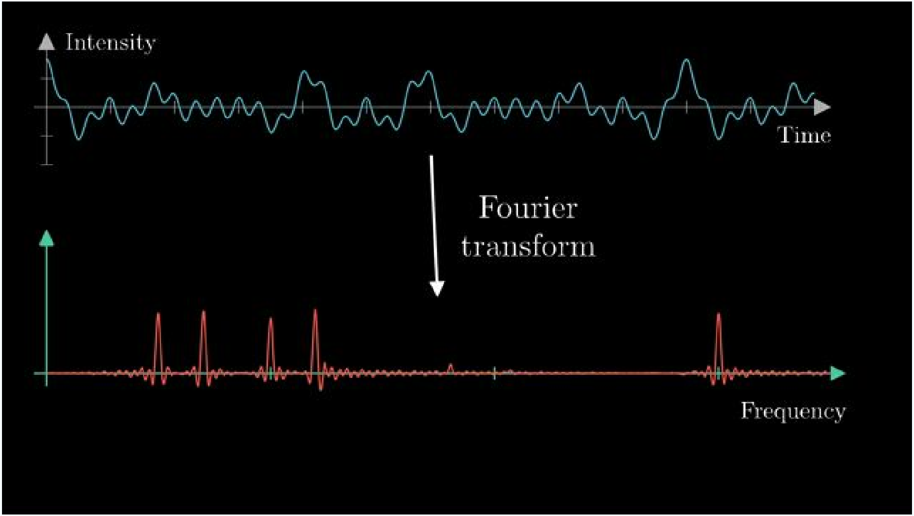
(filmpje 6)
Meetkundige voorstelling van frequentie-spectrum (applet 7)

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum



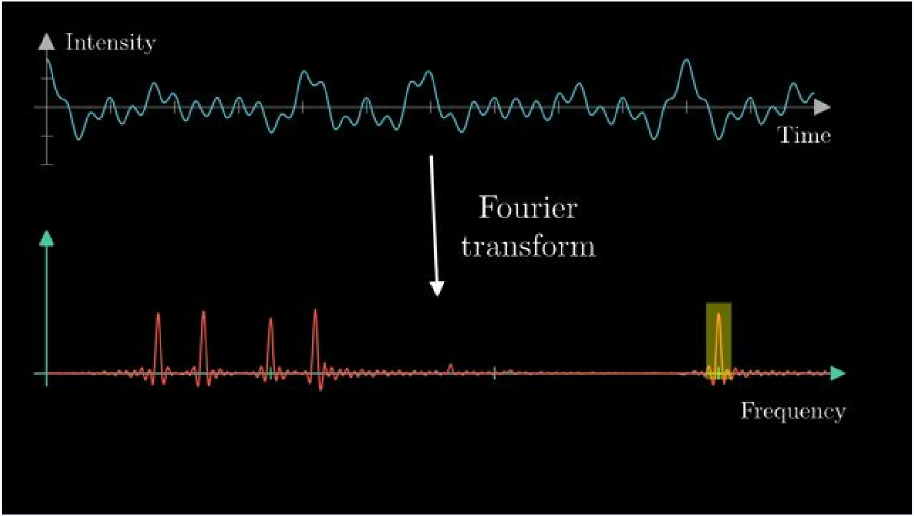
Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Geluidsbewerking



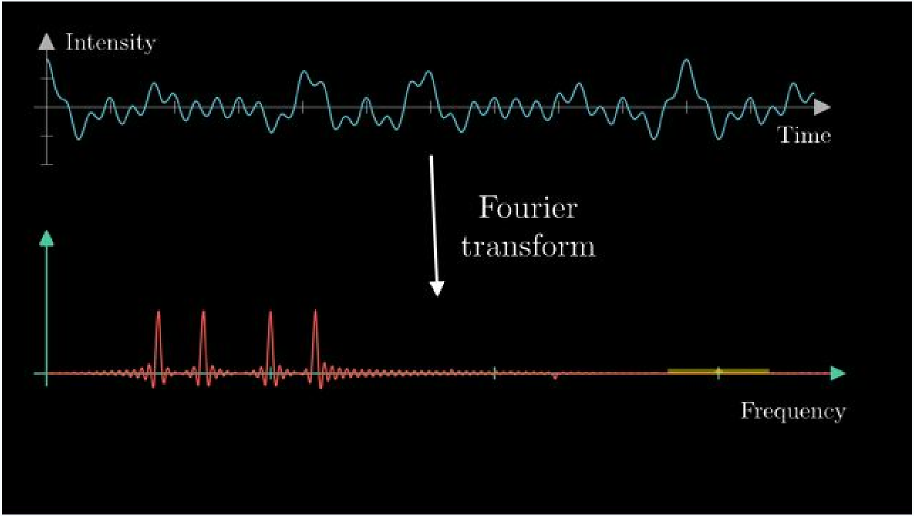
Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Geluidsbewerking



Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

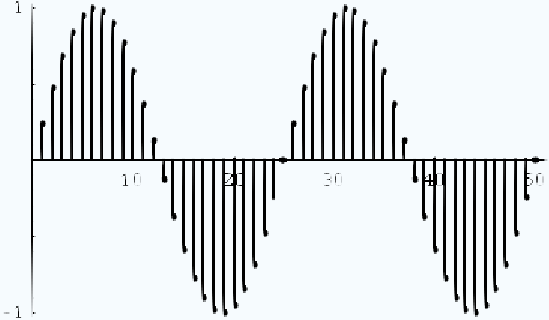
Geluidsbewerking



Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

- in digitale toepassingen is de geluidsgolf discreet (samples)
- geluid met CD kwaliteit: 44100 Hz, d.w.z. 44100 samples/sec

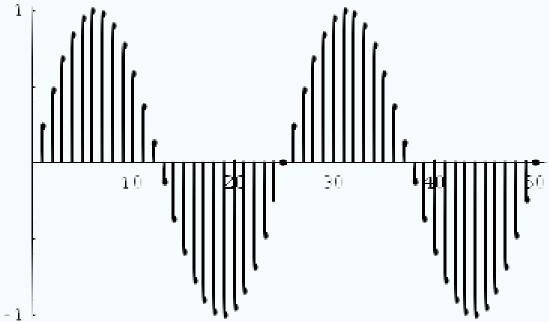


Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

- in digitale toepassingen is de geluidsgolf discreet (samples)
- geluid met CD kwaliteit: 44100 Hz, d.w.z. 44100 samples/sec

De discrete geluidsgolf is dus een vector van getallen (sample-waarden).



Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

- in digitale toepassingen is de geluidsgolf discreet (samples)
- geluid met CD kwaliteit: 44100 Hz, d.w.z. 44100 samples/sec

De discrete geluidsgolf is dus een vector van getallen (sample-waarden).

Voorbeeld

1 min. ongecomprimeerde muziek van CD-kwaliteit (stereo)
$= 60 \times 44100 \times 2 \times 2$ bytes ≈ 10 MB

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

- in digitale toepassingen is de geluidsgolf discreet (samples)
- geluid met CD kwaliteit: 44100 Hz, d.w.z. 44100 samples/sec

De discrete geluidsgolf is dus een vector van getallen (sample-waarden).

Voorbeeld

1 min. ongecomprimeerde muziek van CD-kwaliteit (stereo)
$= 60 \times 44100 \times 2 \times 2$ bytes ≈ 10 MB
na MP3-compressie ≈ 1 MB (met goede encoder)

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

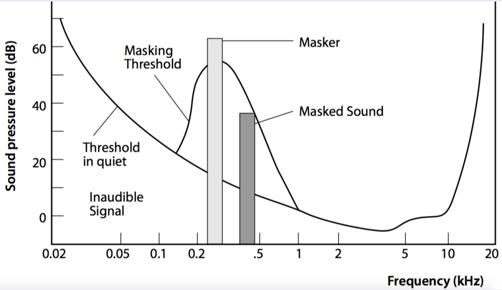
- we bekijken opnieuw het frequentie-spectrum van het signaal
- sommige frequenties van het signaal kunnen gemanipuleerd worden *zonder* hoorbaar effect

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

- we bekijken opnieuw het frequentie-spectrum van het signaal
- sommige frequenties van het signaal kunnen gemanipuleerd worden *zonder* hoorbaar effect

Voorbeeld (Masking)

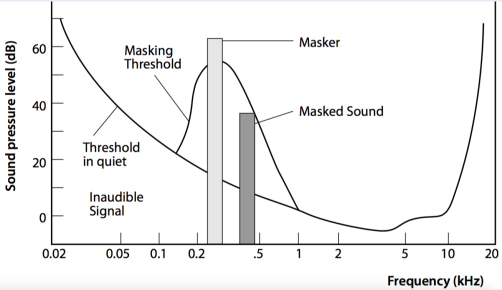


Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum: motivering

Data-compressie voor geluidsbestanden

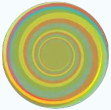
- we bekijken opnieuw het frequentie-spectrum van het signaal
- sommige frequenties van het signaal kunnen gemanipuleerd worden *zonder* hoorbaar effect
- heel wat informatie kan weggegooid worden $\Rightarrow$ compressie (MP3) (demo 8, vraag 2)

Voorbeeld (Masking)



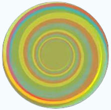
Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

Hoe vinden we de frequenties waaruit een geluidsgolf is samengesteld?



Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

Hoe vinden we de frequenties waaruit een geluidsgolf is samengesteld?

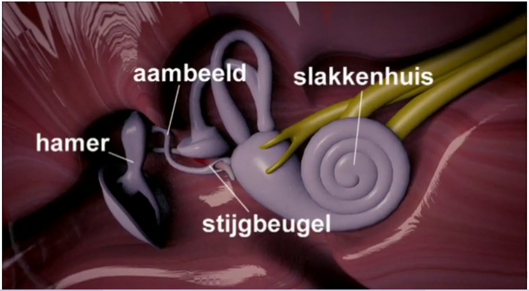


Het menselijk oor slaagt hierin (filmpje 8b).

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

Hoe vinden we de frequenties waaruit een geluidsgolf is samengesteld?

Het menselijk oor slaagt hierin.



Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

Hoe vinden we de frequenties waaruit een geluidsgolf is samengesteld?

Stelling (Joseph Fourier, 1807)

Elke periodieke functie $f(t)$ met frequentie 1 kan ontwikkeld worden in een reeks van harmonieken

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nt) \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

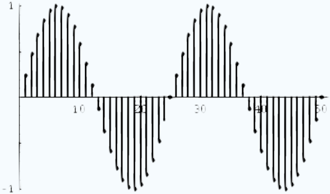
Fourier gaf een formule om de Fourier-coëfficiënten a_n, b_n te berekenen.

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

De stelling van Fourier gaat over een **continu** (geluids)signaal.

Van geluidsgolf naar frequentie-spectrum

De stelling van Fourier gaat over een **continu** (geluids)signaal.
Een discrete geluidsgolf is een vector van getallen (sample-waarden).



Conceptueel voorbeeld (niet realistisch)

Vanaf nu werken we met een discrete geluidsgolf met 16 samples.

De geluidsgolf is een vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{16}) \in \mathbb{R}^{16}$.

Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

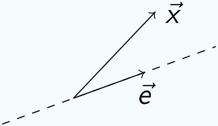
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$

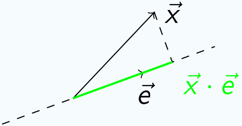
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte
v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$

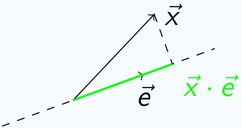
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte
v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

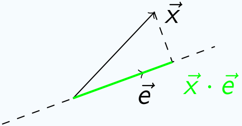
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

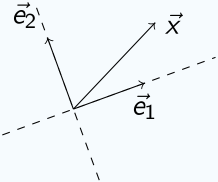
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

Gevolg:



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ onderling loodrecht ($\|e_k\| = 1$)

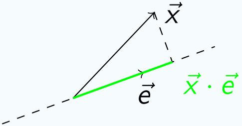
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

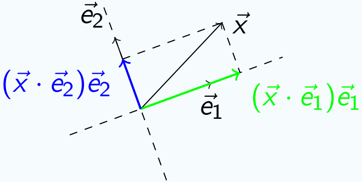
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

Gevolg:



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ onderling loodrecht ($\|e_k\| = 1$)
$\Rightarrow \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2$

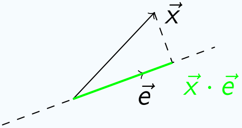
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2)$ is

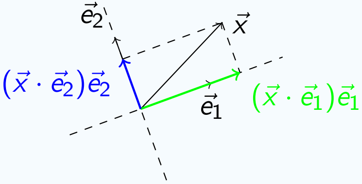
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^2$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

Gevolg:



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ onderling loodrecht ($\|e_k\| = 1$)
$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{k=1}^{2} (\vec{x} \cdot \vec{e}_k)\vec{e}_k$

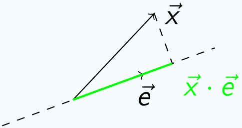
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ is

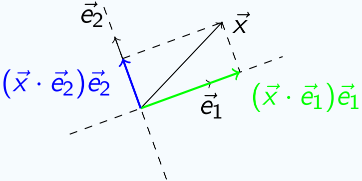
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct in $\mathbb{R}^3$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

Gevolg:



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ onderling loodrecht ($\|e_k\| = 1$)
$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{k=1}^{3} (\vec{x} \cdot \vec{e}_k)\vec{e}_k$

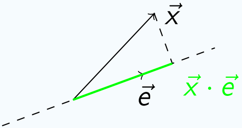
Het inproduct (of scalair product) van twee vectoren

Definitie

Het inproduct van $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ en $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{16})$ is

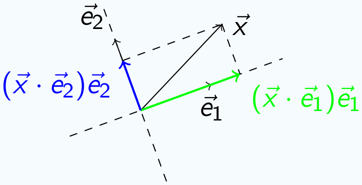
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{16} y_{16} = \sum_{k=1}^{16} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Meetkundige interpretatie van het inproduct $\in \mathbb{R}^{16}$:



$\|\vec{e}\| = 1$
$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{e} =$ (georiënteerde) lengte v.d. component v. $\vec{x}$ langs $\vec{e}$
Gevolg: $\vec{x} \perp \vec{e} \iff \vec{x} \cdot \vec{e} = 0$

Gevolg:



$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \ldots, \quad \vec{e}_{16}$ onderling loodrecht $(\|e_k\| = 1)$
$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{k=1}^{16} (\vec{x} \cdot \vec{e}_k)\vec{e}_k$

Harmonieken detecteren

(applets 9 en 10)

Loodrechte stand van sin en cos

(applet 11, filmpje 12)

Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$\sin\frac{2\pi}{16}+\sin\frac{4\pi}{16}+\cdots+\sin\frac{32\pi}{16}=0$
$\cos\frac{2\pi}{16}+\cos\frac{4\pi}{16}+\cdots+\cos\frac{32\pi}{16}=0$

Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$S := \sin\frac{2\pi}{16} + \sin\frac{4\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\pi}{16} = 0$
$C := \cos\frac{2\pi}{16} + \cos\frac{4\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\pi}{16} = 0$

Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Loodrechte stand van sin en cos

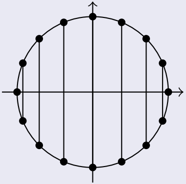
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\tfrac{2\ell\pi}{16} + \cos\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{30\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

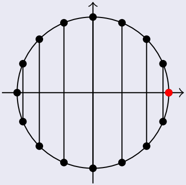
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$

$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell$ geen veelvoud van 16)

Bewijs.

$$S = \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{30\ell\pi}{16} + \textcolor{red}{\sin\frac{32\ell\pi}{16}}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

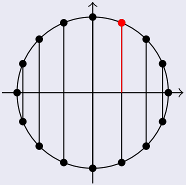
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\tfrac{2\ell\pi}{16} + \cos\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{30\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

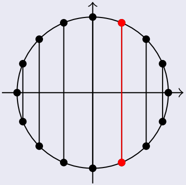
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{30\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

□

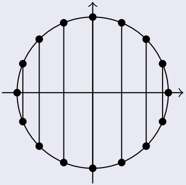
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\tfrac{2\ell\pi}{16} + \cos\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{6\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{28\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

□

Loodrechte stand van sin en cos

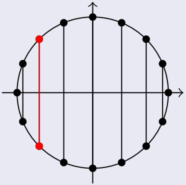
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \sin\frac{6\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{28\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

□

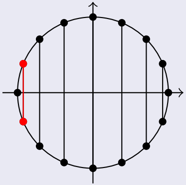
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\frac{6\ell\pi}{16} + \sin\frac{8\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{26\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

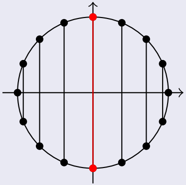
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = {\color{red}\sin\frac{8\ell\pi}{16}} + \sin\frac{10\ell\pi}{16} + \cdots + {\color{red}\sin\frac{24\ell\pi}{16}}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

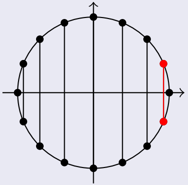
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \color{red}{\sin\frac{10\ell\pi}{16}} + \sin\frac{12\ell\pi}{16} + \cdots + \color{red}{\sin\frac{22\ell\pi}{16}}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

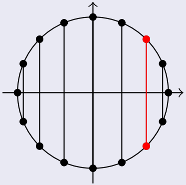
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = {\color{red}\sin\frac{12\ell\pi}{16}} + \sin\frac{14\ell\pi}{16} + \cdots + {\color{red}\sin\frac{20\ell\pi}{16}}$$



(vb.: $\ell = 3$)

$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

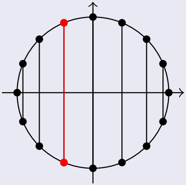
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = \sin\frac{14\ell\pi}{16} + \sin\frac{16\ell\pi}{16} + \sin\frac{18\ell\pi}{16}$$



(vb.: $\ell = 3$)

□

Loodrechte stand van sin en cos

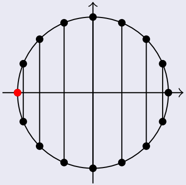
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$S := \sin \frac{2\ell\pi}{16} + \sin \frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin \frac{32\ell\pi}{16} = 0$

$C := \cos \frac{2\ell\pi}{16} + \cos \frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos \frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$

Bewijs.

$S = \sin \frac{16\ell\pi}{16}$



(vb.: $\ell = 3$)

□

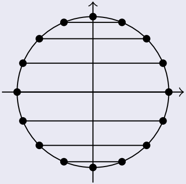
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$S := \sin \frac{2\ell\pi}{16} + \sin \frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin \frac{32\ell\pi}{16} = 0$
$C := \cos \frac{2\ell\pi}{16} + \cos \frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos \frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$

Bewijs.

$S = 0$



□

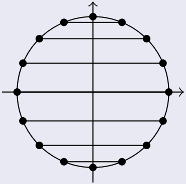
Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$
$$C = \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

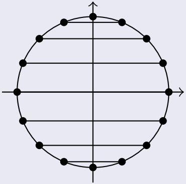
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$
$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad$ (ℓ geen veelvoud van 16)

Bewijs.

$S = 0$

$$C = \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16}$$
$$= \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi + 2\ell\pi}{16}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

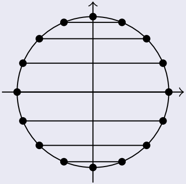
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi + 2\ell\pi}{16} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \left(\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2\ell\pi}{16} - \sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2\ell\pi}{16}\right) \end{aligned}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

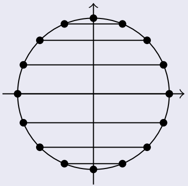
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$

$$\begin{aligned} C &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi+2\ell\pi}{16} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \left(\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2\ell\pi}{16} - \sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2\ell\pi}{16}\right) \\ &= \cos\frac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\right) - \sin\frac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\sin\frac{2k\ell\pi}{16}\right) \end{aligned}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

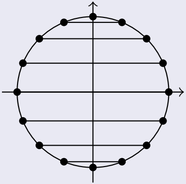
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\tfrac{2\ell\pi}{16} + \cos\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$

$$\begin{aligned}
C &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\tfrac{2k\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\tfrac{2k\ell\pi+2\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \left(\cos\tfrac{2k\ell\pi}{16}\cos\tfrac{2\ell\pi}{16} - \sin\tfrac{2k\ell\pi}{16}\sin\tfrac{2\ell\pi}{16}\right) \\
&= \cos\tfrac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\cos\tfrac{2k\ell\pi}{16}\right) - \sin\tfrac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\sin\tfrac{2k\ell\pi}{16}\right) \\
&= \left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16}\right)C - \left(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16}\right)S
\end{aligned}$$



□

Loodrechte stand van sin en cos

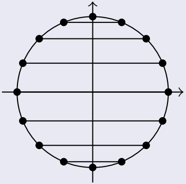
Hulpstelling (Cyclische sommen)

$$S := \sin\tfrac{2\ell\pi}{16} + \sin\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0$$
$$C := \cos\tfrac{2\ell\pi}{16} + \cos\tfrac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\tfrac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$

$$\begin{aligned}
C &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\tfrac{2k\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\tfrac{2k\ell\pi+2\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \left(\cos\tfrac{2k\ell\pi}{16}\cos\tfrac{2\ell\pi}{16} - \sin\tfrac{2k\ell\pi}{16}\sin\tfrac{2\ell\pi}{16}\right) \\
&= \cos\tfrac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\cos\tfrac{2k\ell\pi}{16}\right) - \sin\tfrac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\sin\tfrac{2k\ell\pi}{16}\right) \\
&= \left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16}\right) C
\end{aligned}$$



$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

Hulpstelling (Cyclische sommen)

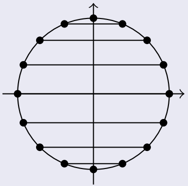
$$S := \sin\frac{2\ell\pi}{16} + \sin\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \sin\frac{32\ell\pi}{16} = 0$$

$$C := \cos\frac{2\ell\pi}{16} + \cos\frac{4\ell\pi}{16} + \cdots + \cos\frac{32\ell\pi}{16} = 0 \qquad (\ell \text{ geen veelvoud van } 16)$$

Bewijs.

$$S = 0$$

$$\begin{aligned}
C &= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi+2\ell\pi}{16} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{16} \left(\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2\ell\pi}{16} - \sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2\ell\pi}{16}\right) \\
&= \cos\frac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\right) - \sin\frac{2\ell\pi}{16}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{16}\sin\frac{2k\ell\pi}{16}\right) \\
&= \left(\cos\frac{2\ell\pi}{16}\right) C
\end{aligned}$$



$\Rightarrow C = 0$ $\square$

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin\frac{2\ell\pi}{16}, \sin\frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos\frac{2m\pi}{16}, \cos\frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos\frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2km\pi}{16} = 0.$

$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin\frac{2\ell\pi}{16}, \sin\frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos\frac{2m\pi}{16}, \cos\frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos\frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$0 = \sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k(\ell+m)\pi}{16}$$

$\square$

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin \frac{2\ell\pi}{16}, \sin \frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin \frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos \frac{2m\pi}{16}, \cos \frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos \frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k(\ell+m)\pi}{16} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} + \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} \end{aligned}$$

□

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin \frac{2\ell\pi}{16}, \sin \frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin \frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos \frac{2m\pi}{16}, \cos \frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos \frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k(\ell \pm m)\pi}{16} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} \pm \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} \end{aligned}$$

□

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin\frac{2\ell\pi}{16}, \sin\frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos\frac{2m\pi}{16}, \cos\frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos\frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k(\ell\pm m)\pi}{16} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} \pm \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \sin\frac{2km\pi}{16} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} = \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \sin\frac{2km\pi}{16} = 0.$ □

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(1\le\ell\le 16,\ 1\le m\le 16,\ \ell\ne m,\ \ell+m\ne 16)$$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16}\sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2km\pi}{16}=\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2km\pi}{16}=0.$

□

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin \frac{2\ell\pi}{16}, \sin \frac{4\ell\pi}{16}, \dots, \sin \frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\sin \frac{2m\pi}{16}, \sin \frac{4m\pi}{16}, \dots, \sin \frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(\cos \frac{2\ell\pi}{16}, \cos \frac{4\ell\pi}{16}, \dots, \cos \frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos \frac{2m\pi}{16}, \cos \frac{4m\pi}{16}, \dots, \cos \frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16,\ \ell \neq m,\ \ell + m \neq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} = \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$0 = \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k(\ell+m)\pi}{16} \quad (\ell + m \neq 16)$$

□

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$(\sin\frac{2\ell\pi}{16}, \sin\frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\sin\frac{2m\pi}{16}, \sin\frac{4m\pi}{16}, \ldots, \sin\frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(\cos\frac{2\ell\pi}{16}, \cos\frac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \cos\frac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos\frac{2m\pi}{16}, \cos\frac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos\frac{32m\pi}{16}) = 0$
$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16,\ \ell \neq m,\ \ell + m \neq 16)$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \sin\frac{2km\pi}{16} = \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k(\ell+m)\pi}{16} \qquad (\ell + m \neq 16) \\ &= \sum_{k=1}^{16} \cos\frac{2k\ell\pi}{16} \cos\frac{2km\pi}{16} - \sin\frac{2k\ell\pi}{16} \sin\frac{2km\pi}{16} \end{aligned}$$

□

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(1\le\ell\le16,\ 1\le m\le16,\ \ell\ne m,\ \ell+m\ne16)$$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16}\sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2km\pi}{16}=\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2km\pi}{16}=0.$

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k(\ell\pm m)\pi}{16}\quad(\ell+m\ne16,\ \ell\ne m)\\&=\sum_{k=1}^{16}\cos\frac{2k\ell\pi}{16}\cos\frac{2km\pi}{16}\mp\sin\frac{2k\ell\pi}{16}\sin\frac{2km\pi}{16}\end{aligned}$$

$\square$

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin \tfrac{2\ell\pi}{16}, \sin \tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin \tfrac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\sin \tfrac{2m\pi}{16}, \sin \tfrac{4m\pi}{16}, \ldots, \sin \tfrac{32m\pi}{16}) = 0$$
$$(\cos \tfrac{2\ell\pi}{16}, \cos \tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \cos \tfrac{32\ell\pi}{16}) \cdot (\cos \tfrac{2m\pi}{16}, \cos \tfrac{4m\pi}{16}, \ldots, \cos \tfrac{32m\pi}{16}) = 0$$
$$(1 \leq \ell \leq 16,\ 1 \leq m \leq 16,\ \ell \neq m,\ \ell + m \neq 16)$$

Bewijs.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} = \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} = 0.$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k(\ell \pm m)\pi}{16} \quad (\ell + m \neq 16,\ \ell \neq m) \\ &= \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} \mp \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\ell\pi}{16} \cos \frac{2km\pi}{16} = \sum_{k=1}^{16} \sin \frac{2k\ell\pi}{16} \sin \frac{2km\pi}{16} = 0. \qquad \square$$

Vraag 3.

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(1\le\ell\le16,\ 1\le m\le16,\ \ell\ne m,\ \ell+m\ne16)$$

$m=16-\ell$

$$\Rightarrow(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=(-\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},-\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,-\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})$$
$$(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\dots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})$$

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(0\le\ell\le 8,\ 0\le m\le 8,\ \ell\ne m)$$

$$m=16-\ell$$
$$\Rightarrow (\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=(-\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},-\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,-\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})$$
$$(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})$$

Gevolg

In een discreet signaal zijn de frequenties dubbelzinnig! (demo 13–15)

Loodrechte stand van sin en cos

Stelling (Loodrechte stand)

$$(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\sin\tfrac{2m\pi}{16},\sin\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16})\cdot(\cos\tfrac{2m\pi}{16},\cos\tfrac{4m\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32m\pi}{16})=0$$
$$(0\le\ell\le 8,\ 0\le m\le 8,\ \ell\ne m)$$

Gevolg

In een discreet signaal zijn de frequenties dubbelzinnig! (demo 13–15)

Gevolg (Geluidstechnisch)

Voor een geluidsopname van CD-kwaliteit worden eerst frequenties boven 22050 Hz (de Nyquist-frequentie) grotendeels uitgefilterd (*anti-aliasfilter*), en dan pas wordt digitaal gesampled (op 44100 Hz). (filmpje 16)

Geluid $>$ 20000 Hz is ultrasoon.

Loodrechte stand van sin en cos

Besluit

$$\left\{\left(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16}, \sin\tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\tfrac{32\ell\pi}{16}\right) : \ell = 1, \ldots, 7\right\}$$
$$\cup \left\{\left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16}, \cos\tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \cos\tfrac{32\ell\pi}{16}\right) : \ell = 0, 1, \ldots, 8\right\}$$

zijn onderling loodrechte vectoren in $\mathbb{R}^{16}$.

Loodrechte stand van sin en cos

Besluit

$$\left\{\left(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16}, \sin\tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \sin\tfrac{32\ell\pi}{16}\right) : \ell = 1, \ldots, 7\right\}$$
$$\cup\left\{\left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16}, \cos\tfrac{4\ell\pi}{16}, \ldots, \cos\tfrac{32\ell\pi}{16}\right) : \ell = 0, 1, \ldots, 8\right\}$$

zijn onderling loodrechte vectoren in $\mathbb{R}^{16}$.

Wat is de lengte van deze vectoren?

$\ell = m \notin \{0, 8\}$:

$$\begin{aligned}0 &= \cos(2\tfrac{2\ell\pi}{16}) + \cdots + \cos(2\tfrac{32\ell\pi}{16})\\ &= \cos^2(\tfrac{2\ell\pi}{16}) - \sin^2(\tfrac{2\ell\pi}{16}) + \cdots + \cos^2(\tfrac{32\ell\pi}{16}) - \sin^2(\tfrac{32\ell\pi}{16})\end{aligned}$$

$$16 = \left(\cos^2(\tfrac{2\ell\pi}{16}) + \sin^2(\tfrac{2\ell\pi}{16})\right) + \cdots + \left(\cos^2(\tfrac{32\ell\pi}{16}) + \sin^2(\tfrac{32\ell\pi}{16})\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16} \cos^2(\tfrac{2k\ell\pi}{16}) = \sum_{k=1}^{16} \sin^2(\tfrac{2k\ell\pi}{16}) = 8$$

Loodrechte stand van sin en cos

Besluit

$$\left\{\left(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16}\right):\ell=1,\ldots,7\right\}$$
$$\cup\left\{\left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16}\right):\ell=0,1,\ldots,8\right\}$$

zijn onderling loodrechte vectoren in $\mathbb{R}^{16}$.

Gevolg (Discrete Fourier-Transformatie (DFT))

Geg. $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_{16})\in\mathbb{R}^{16}$.
Als $a_m := \sum_{k=1}^{16} x_k \cos\frac{2km\pi}{16}$ en $b_m := \sum_{k=1}^{16} x_k \sin\frac{2km\pi}{16}$, dan is

$$x_m = \frac{1}{16}a_0 + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{7} a_k\cos\frac{2km\pi}{16} + \frac{1}{16}a_8\cos m\pi + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{7} b_k\sin\frac{2km\pi}{16}$$

$(m=1,\ldots,16)$

Elke geluidsvector is een lineaire combinatie van sinussen en cosinussen.

Loodrechte stand van sin en cos

Besluit

$$\left\{\left(\sin\tfrac{2\ell\pi}{16},\sin\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\sin\tfrac{32\ell\pi}{16}\right):\ell=1,\ldots,7\right\}$$
$$\cup\left\{\left(\cos\tfrac{2\ell\pi}{16},\cos\tfrac{4\ell\pi}{16},\ldots,\cos\tfrac{32\ell\pi}{16}\right):\ell=0,1,\ldots,8\right\}$$

zijn onderling loodrechte vectoren in $\mathbb{R}^{16}$.

Gevolg (Sample-stelling van Shannon en Nyquist, discrete versie)

Als $f(t)=\frac{1}{16}a_0+\frac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{7}a_k\cos 2kt\pi+\frac{1}{16}a_8\cos 16t\pi+\frac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{7}b_k\sin 2kt\pi$
(voor zekere a_k, b_k),
dan is f volledig bepaald door de sample $\vec{x}=(f(\frac{1}{16}),\ldots,f(1))\in\mathbb{R}^{16}$.
Reden: $a_m=\sum_{k=1}^{16}f(\frac{k}{16})\cos\frac{2km\pi}{16}$ en $b_m=\sum_{k=1}^{16}f(\frac{k}{16})\sin\frac{2km\pi}{16}$.

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 1 sec met 44100 samples/sec

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 1 sec met 44100 samples/sec $\Rightarrow$ decompositie in frequenties 1, 2, . . . , 22050 Hz (Nyquist)

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 1 sec met 8000 samples/sec $\Rightarrow$ decompositie in frequenties 1, 2, . . . , 4000 Hz (Nyquist)

$\rightarrow$ hoorbaar kwaliteitsverlies (demo 17)

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 0,1 sec met 44100 samples/sec

(poll 4)

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 0,1 sec met 44100 samples/sec $\Rightarrow$ decompositie in frequenties 10, 20, $\ldots$, 22050 Hz (Nyquist)

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 0,01 sec met 44100 samples/sec $\Rightarrow$ decompositie in frequenties 100, 200, $\ldots$, 22000 Hz (Nyquist)

Bewerken van geluid

Voorbeeld

Discreet geluidssignaal gedurende 0,01 sec met 44100 samples/sec $\Rightarrow$ decompositie in frequenties 100, 200, ..., 22000 Hz (Nyquist)

Besluit

korter signaal $\Rightarrow$ lagere frequentieresolutie (onzekerheidsprincipe)

Beeldbewerking

- afbeelding $=$ 2-dimensionaal

Beeldbewerking

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)

Beeldbewerking

- afbeelding $=$ 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Beeldbewerking

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

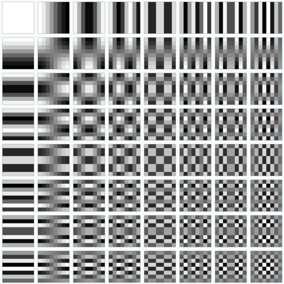
Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$

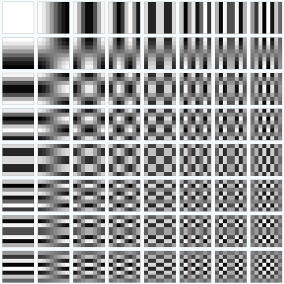


Beeldbewerking

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$
- elke afbeelding kan beschreven worden als een lineaire combinatie van basisfuncties

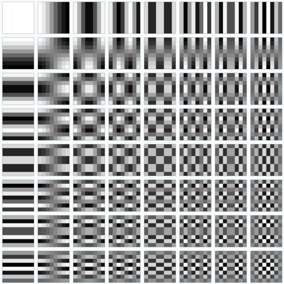


Beeldbewerking

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$
- elke afbeelding kan beschreven worden als een lineaire combinatie van basisfuncties

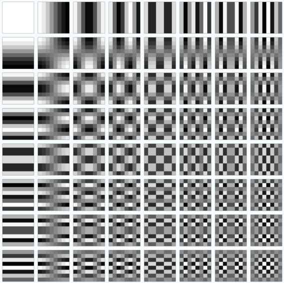


Beeldbewerking

- afbeelding = 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$
- frequenties die met lage intensiteit voorkomen, kunnen weggelaten worden *zonder* zichtbaar effect $\Rightarrow$ compressie (JPEG)



Beeldbewerking

- afbeelding $=$ 2-dimensionaal
- punten beschreven door 2 coördinaten (x, y)
- decompositie in x-frequenties en y-frequenties

Analoge Fourier-analyse voor functies van 2 veranderlijken:

- orthonormale basis van functies $f_{k,\ell}(x, y) = \cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$
- frequenties die met lage intensiteit voorkomen, kunnen weggelaten worden *zonder* zichtbaar effect $\Rightarrow$ compressie (JPEG)
- het oog is minder gevoelig voor de hogere frequenties in een foto

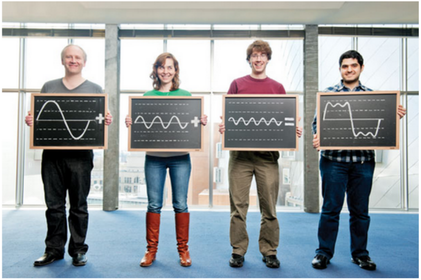
Recente ontwikkelingen (2012)

A FASTER FOURIER TRANSFORM

In January, four MIT researchers showed off a replacement for one of the most important algorithms in computer science. Dina Katabi, Haitham Hassanieh, Piotr Indyk, and Eric Price have created a faster way to perform the Fourier transform, a mathematical technique for processing streams of data that underlies the operation of things such as digital medical imaging, Wi-Fi routers, and 4G cellular networks.

The principle of the Fourier transform, which dates back to the 19th century, is that any signal, such as a sound recording, can be represented as the sum of a collection of sine and cosine waves with different frequencies and amplitudes. This collection of waves can then be manipulated with relative ease—for example, allowing a recording to be compressed or noise to be suppressed. In the mid-1960s, a computer-friendly algorithm called the fast Fourier transform (FFT) was developed. Anyone who's marveled at the tiny size of an MP3 file compared with the same recording in an uncompressed form has seen the power of the FFT at work.

A story for Technology Review's May/June 2012 issue.
Photo by Webb Chappell



Sparse Fourier Transform (SFT): sneller algoritme voor DFT