



Grafen, matrices en clustering van data

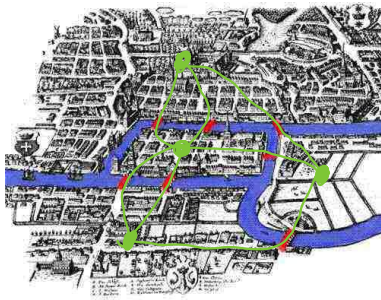
Jan De Beule

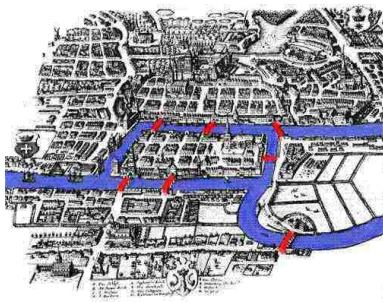
7 februari 2024



1. Grafen

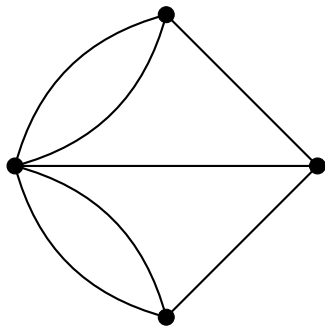
Inleiding

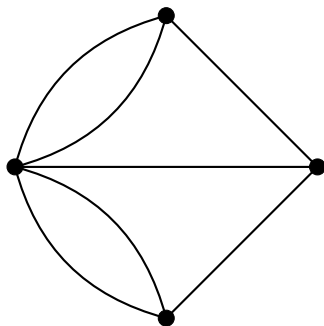




Vraagstuk van Euler (1707 – 1783)

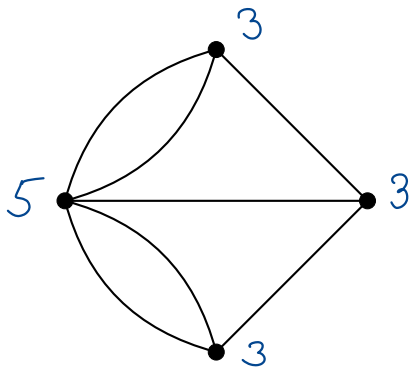
Is het mogelijk om een wandeling te bepalen die elk van de zeven bruggen precies eenmaal gebruikt, en die eindigt in haar beginpunt?





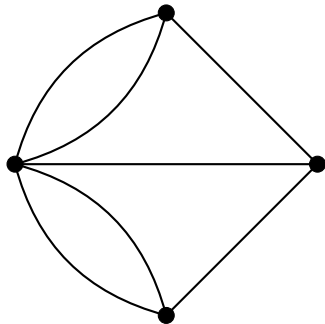
Een wandeling of pad is een opeenvolging van punten die verbonden zijn door een boog. De gezochte wandeling moet dus elke boog precies eenmaal gebruiken.

Inleiding

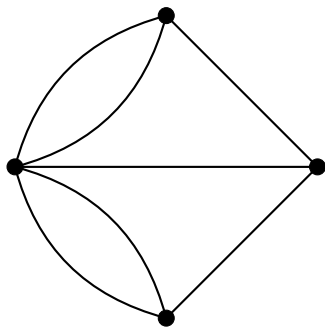


gevolg

Elk punt van de gezochte wandeling is bevat in een even aantal bogen.



Elke top is bevat in een **oneven** aantal bogen.



Resultaat

De gezochte wandeling bestaat niet.

Definitie 1.2.1

Een *enkelvoudige graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een ongeordend paar toppen.

Definitie 1.2.1

Een *enkelvoudige graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een ongeordend paar toppen.

Notatie

We noteren $x \sim y$ als de toppen x en y adjacent zijn, of dus als het paar $\{x, y\}$ een boog is.

Definitie 1.2.1

Een *enkelvoudige graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een ongeordend paar toppen.

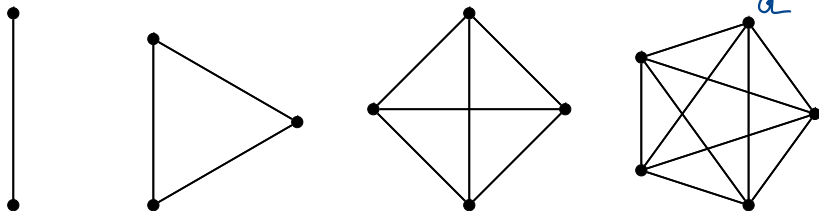
Notatie

We noteren $x \sim y$ als de toppen x en y adjacent zijn, of dus als het paar $\{x, y\}$ een boog is.

Opmerking

Een boog kan meerdere keren voorkomen.

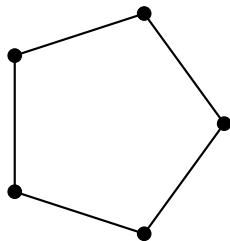
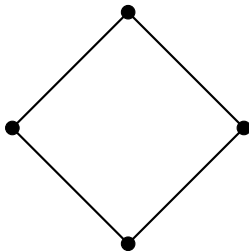
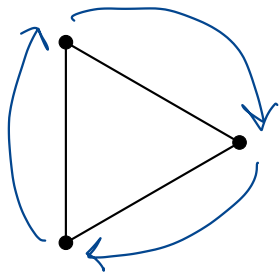
Voorbeelden



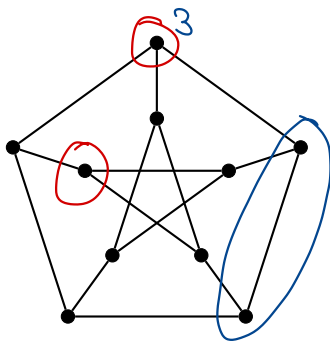
Complete grafen op 2,3,4 en 5 toppen

elke top is verbonden met elke andere top.

Voorbeelden



Cykelgrafen op 3, 4 en 5 toppen



De Petersengraaf

Facebookgraaf

- ▶ De verzameling van toppen is de verzameling van alle gebruikers van facebook
- ▶ Twee toppen zijn adjacent als de gebruikers bevriend zijn.

Facebookgraaf

- ▶ De verzameling van toppen is de verzameling van alle gebruikers van facebook
- ▶ Twee toppen zijn adjacent als de gebruikers bevriend zijn.

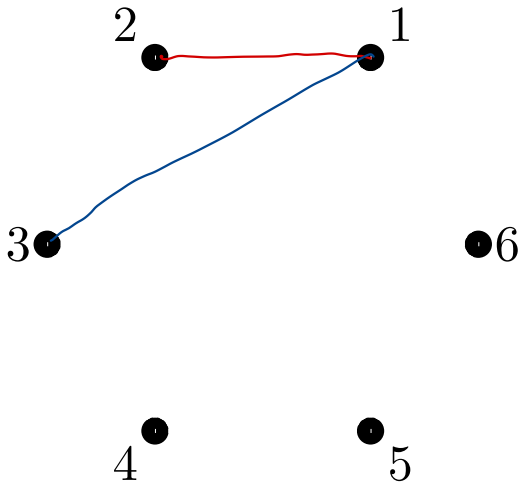
Wist je dat

er in een groep van 6 willekeurige facebookgebruikers steeds ofwel minstens 3 ervan allemaal met elkaar bevriend zijn, ofwel minstens 3 ervan allemaal vreemden zijn?

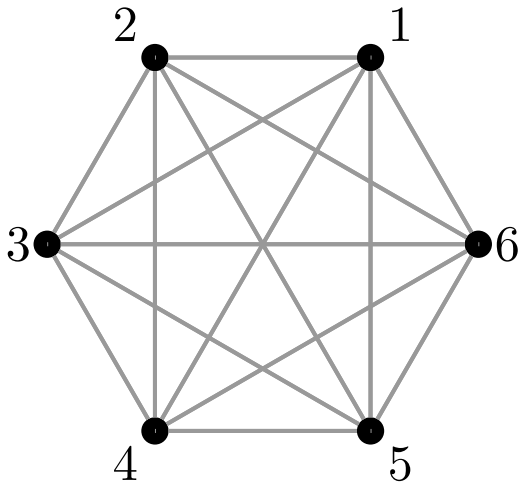
Stelling

In een groep van 6 willekeurige facebookgebruikers is er steeds een groepje van ofwel minstens 3 vrienden, ofwel minstens 3 voor elkaar onbekenden.

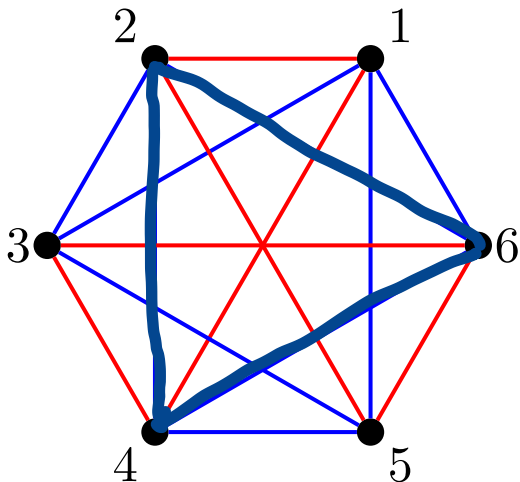
Facebookgraaf



Facebookgraaf



Facebookgraaf



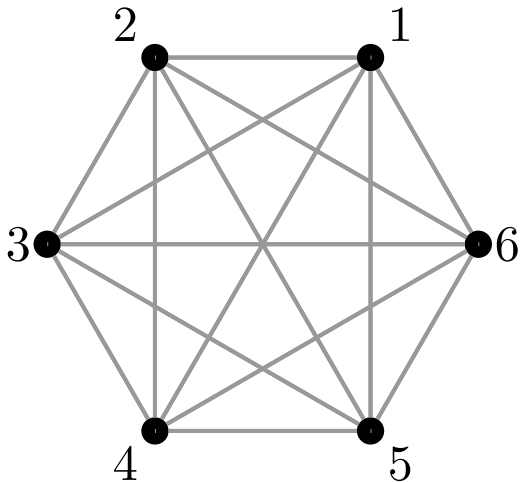
Zoek de rode of blauwe complete graaf op drie toppen!

Te bewijzen

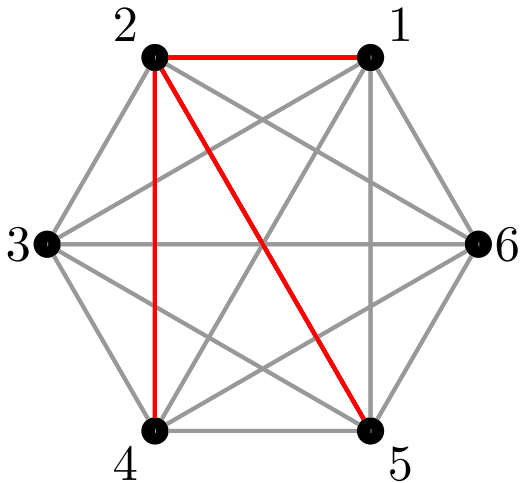
Elke 2-kleuring van de bogen bevat ofwel een rode, ofwel een blauwe complete graaf op 3 toppen.

Het aantal verschillende 2-kleuringen van de bogen van een complete graaf op 6 toppen is 156.

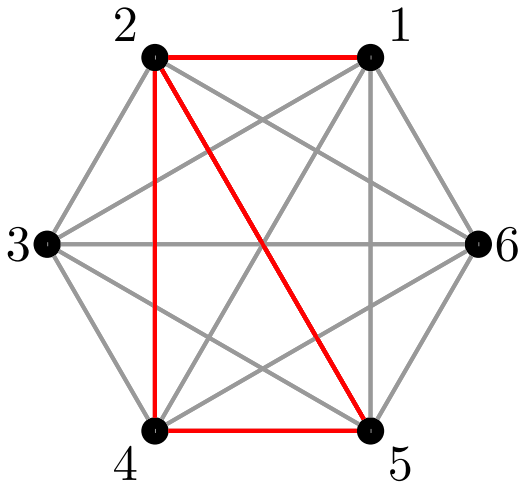
Facebookgraaf



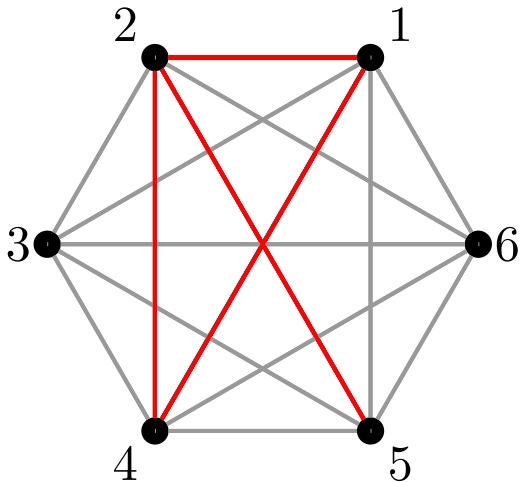
Facebookgraaf



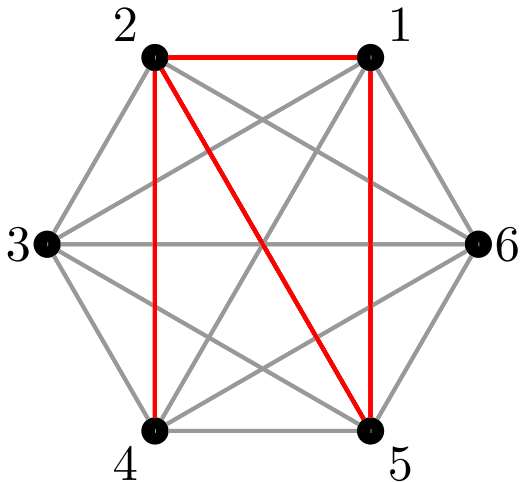
Facebookgraaf



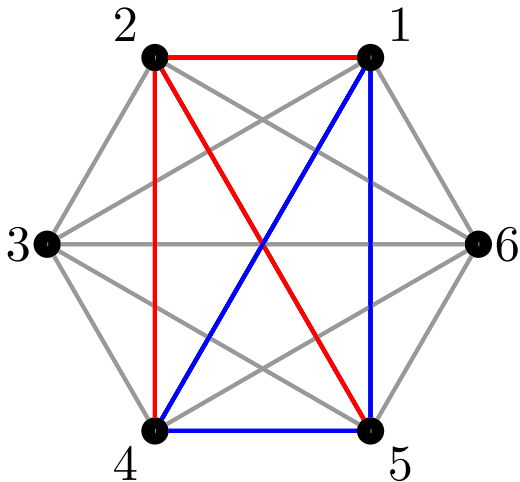
Facebookgraaf



Facebookgraaf



Facebookgraaf



Kan je met wiskunde beroemd worden?

Ons onderzoek in het vakgebied dat aan de basis ligt van het onderwijs, is van wereldniveau.



Sam Mattheus legt zijn bevindingen uit aan de universiteit in Pittsburgh. © Carnegie Mellon University

Jonge Vlaming zorgt voor doorbraak in wiskunde: Sam Mattheus (29) kraakt aartsmoeilijke code

Een wiskundig probleem waar specialisten al decennia de tanden op stukbijten, is opgelost. En het is een jonge Vlaming die de code heeft gekraakt. Sam Mattheus (29), doctor aan de VUB, staat nog maar aan het begin van zijn academische carrière, maar krijgt nu al lof uit alle hoeken van de wereld.

VUB Press

Wetenschapsnieuws

VUB-onderzoeker lost decennia oud wiskundig probleem op

Dr. Sam Mattheus (29) bereikt baanbrekend resultaat in de Ramsey-theorie

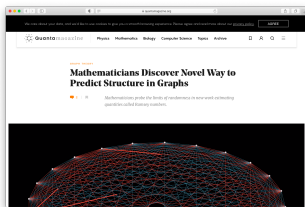
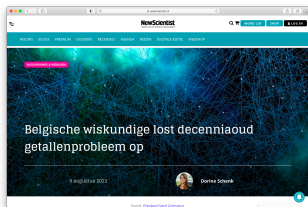
Has lie je een wiskundig probleem op maar al veertig jaar geen vooruitgang in te geboekt? Dr. Sam Mattheus, verbonden aan de Vrije Universiteit Brussel, vertrok voor een jaar naar de Verenigde Staten om het uit te zoeken. Hij ontdeedde zijn kennis over de eindige meetkunde met de bekende profheuristische en leste niet alleen een decennia oud probleem op, maar bleef een innovatief alternatief voor de huidige aanpak van Ramsey-problemen. "Dit om andere Ramsey-getallen te berekenen, kan de eindige meetkunde heel wat oplossingen bieden", zegt Mattheus.

Het vraagstuk dat Mattheus oploste, kadet binnen de zogenaamde Ramsey-getallen. Dat zijn fundamentele getallen die de grenzen van mogelijke volgorde weergeven. De zijn vooral relevant voor de meetkunde. Toch slaagde Mattheus er na enkele maanden al in, in samenwerking met prof. Jacques Verstraëte van de University of California San Diego (UCSD), "het was voor ons ook een grote verassing", zegt Mattheus. "Het was lange tijd niet duidelijk hoe we het gingen aanpakken en of het überhaupt zou lukken." Op een dag werd de Mattheus het bureau van Verstraëte binnen met een idee.

<http://prez.ly/8o3c>

Kan je met wiskunde beroemd worden?



Ons onderzoek in het vakgebied dat aan de basis ligt van het onderwijs, is van wereldniveau.




<https://www.quantamagazine.org/>

[mathematicians-discover-new-way-to-predict-structure-in-graphs-20230622/](https://www.quantamagazine.org/mathematicians-discover-new-way-to-predict-structure-in-graphs-20230622/) <https://www.newscientist.nl/nieuws/belgische-wiskundige-lost-decenniaoud-probleem-op/>

Kan je met wiskunde beroemd worden?

 **Jan Danckaert**
2u · 

VUB has a solid tradition in groundbreaking mathematical research (with colleagues like Bourgain, Daubechies, Delbaen, ...). I'm thrilled to see that the young generation of mathematicians follows up on this tradition. Congratulations!



VUB.BE
VUB researcher solves decades-old maths problem
Dr. Sam Matthew combined his knowledge of geometry with classical graph theory and dis...

Is dit eigenlijk allemaal wel nuttig?

- ▶ Wiskunde heeft directe en indirecte toepassingen.
- ▶ Grafentheorie heeft heel veel toepassingen in computerwetenschappen, economie, biomedische wetenschappen, artificiële intelligentie, data science, etc. en, uiteraard, in de **wiskunde** zelf.
- ▶ Het *facebookprobleem* is het topje van de ijsberg in de zogenaamde Ramsey-theorie ...
- ▶ ... een theorie die je kan omschrijven als de studie van *geordende structuren* die noodzakelijk ontstaan in een chaotisch systeem.

Internetgraaf

- ▶ De verzameling van toppen is de verzameling van alle websites
- ▶ Dit is een voorbeeld van een gerichte graaf. Een website kan verwijzen *naar* een andere website, maar dit is niet noodzakelijk omgekeerd.

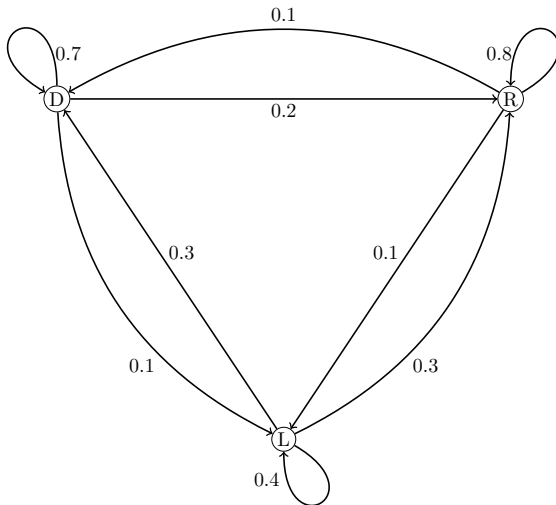
Internetgraaf

- ▶ De verzameling van toppen is de verzameling van alle websites
- ▶ Dit is een voorbeeld van een gerichte graaf. Een website kan verwijzen *naar* een andere website, maar dit is niet noodzakelijk omgekeerd.

Gerichte grafen

Dit is een voorbeeld van een gerichte graaf. De bogen tussen twee toppen hebben een *richting*. We duiden ze aan met een pijl.

Voorbeelden

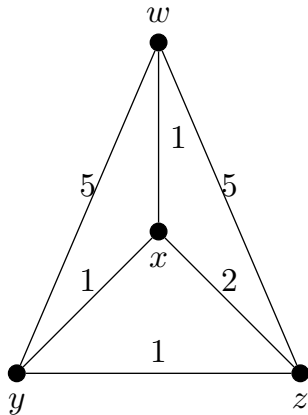


Spoorwegengraaf

- ▶ De verzameling van toppen is de verzameling van alle stations
- ▶ Twee stations zijn verbonden als er een rechtstreekse verbinding tussen bestaat.
- ▶ Bij elke verbinding kunnen we de tijd bijhouden die nodig is om de afstand af te leggen.

Gewogen grafen

Dit is een voorbeeld van een gewogen graaf. De bogen tussen twee toppen hebben een *gewicht*



2. Vectoren en matrices

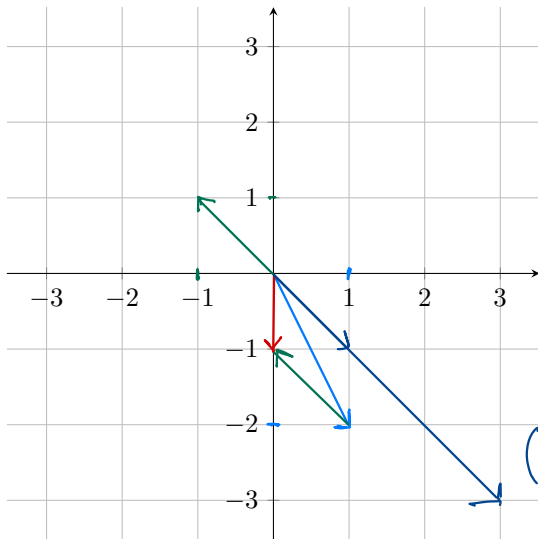
- ▶ Een vector is een “algebraïsch” object: je kan er mee rekenen.
- ▶ Analytische meetkunde is heel sterk afhankelijk van vectoren en bijhorende berekeningen.

$$1 + (-1) = 0$$

▶ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow -2 + 1 = -1$

▶ $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vectoren



$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Inproduct en lengte van een vector

Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

De lengte van een vector $\vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Inproduct en lengte van een vector

Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is

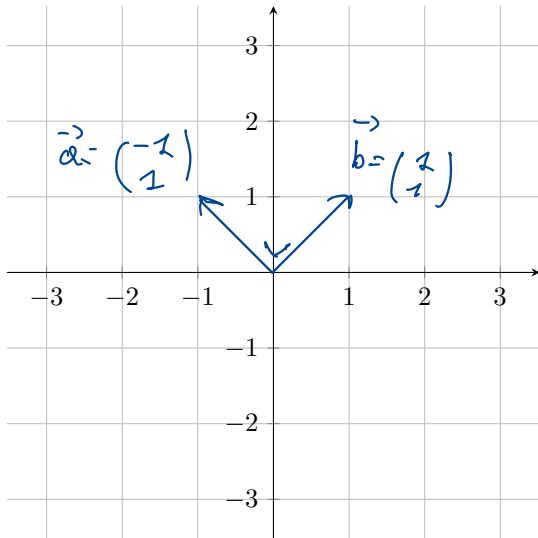
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

De lengte van een vector $\vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

De vectoren \vec{a} en \vec{b} zijn loodrecht (of orthogonaal) als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Vectoren

$$\vec{a}, \vec{b} = (-1)(1) + (1) \cdot (1) \\ = 0$$





- ▶ Een matrix is een “algebraïsch” object: je kan er mee rekenen.
- ▶ Je kan matrices bijvoorbeeld gebruiken om stelsels lineaire vergelijkingen mee op te lossen.
- ▶ Indien de “dimensies” het toelaten, kan je matrices met vectoren, en matrices met matrices vermenigvuldigen.

Een $m \times n$ -matrix (met coëfficiënten/componenten a_{ij})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Optelling

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldiging met een scalar

$$4A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)$$

Vermenigvuldiging met een vector

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)$

Rotatie van $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ over hoek θ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotatie van $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ over hoek θ :

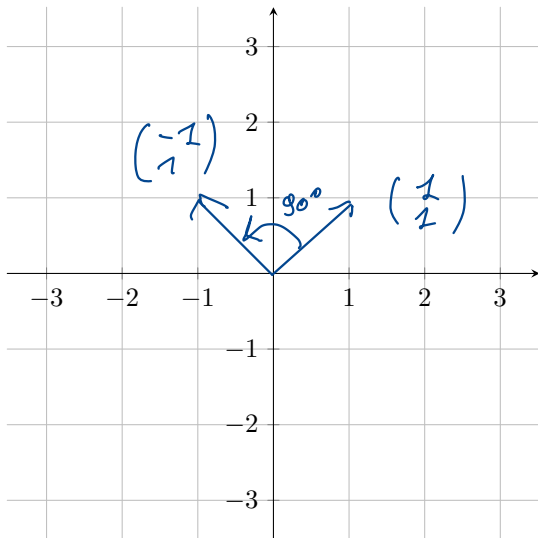
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotatiematrix over $\theta = 90^\circ$ in tegenwijzerzin is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Matrixvermenigvuldiging

The diagram shows the multiplication of two 2x2 matrices. The first matrix is $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and the second is $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Handwritten blue circles highlight the elements a , b , e , and g . A blue arrow points from b to e , and another blue arrow points from a to g . A blue box highlights the expression $ae + bg$ in the top-left element of the resulting matrix $\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Het vermenigvuldigen van matrices vereist op het eerste zicht nogal wat berekeningen.

Matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Reken na dat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

Dus als $ad - bc \neq 0$, dan geldt, met

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dat $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ We noteren $B = A^{-1}$, de *inverse matrix van A*.

Matrixvermenigvuldiging

Dus als $ad - bc \neq 0$, dan geldt, met

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dat $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ We noteren $B = A^{-1}$, de *inverse matrix van A*. Niet alle matrices hebben een inverse, b.v.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

heeft geen inverse.

Het matrixproduct is niet commutatief!

Het matrixproduct is niet commutatief!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

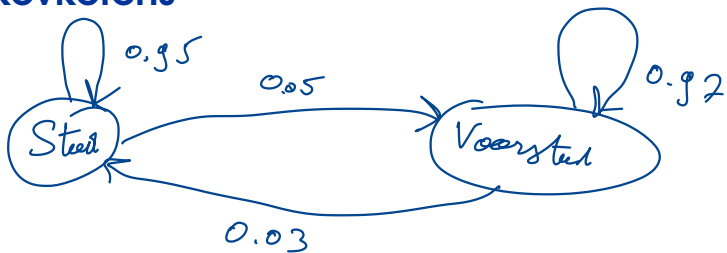
Het matrixproduct is niet commutatief!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

In een stad met bijhorend voorstedelijk gebied, wil men op jaarbasis de verdeling van de bevolking in stad/voorstad modelleren. Na enkele tellingen blijkt dat er jaarlijks 5% van de bevolking uit de stad naar de voorstad verhuist, en 3% van de bevolking vanuit de voorstad naar de stad verhuist. Het overige deel van de bevolking in de stad, respectievelijk voorstad, blijft in de stad, respectievelijk voorstad. Op een bepaald ogenblik woont 60 % in de stad en 40 % in de voorstad en wil men een langetermijnvoorspelling maken en dus de verdeling over 10, 20, 30, ... jaren inschatten.

Markovketens



$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.03 & 0.97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56544 \\ 0.43456 \end{pmatrix}$$

Na 20 jaar

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Definitie

Stel A is een vierkante matrix en \vec{x} een vector verschillend van de nulvector. Als $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dan noemen we λ een eigenwaarde van A en \vec{x} een bijhorende eigenvector.

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.92 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0.92 \\ 5 & -0.92 \end{pmatrix}$$

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.92 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_P = \begin{pmatrix} 3 & 0.92 \\ 5 & -0.92 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix}$$

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD. \quad \times P^{-1}$$

Dus

$$A(P P^{-1}) = P D P^{-1}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^k &= (P D P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P D P^{-1}) \\ &= P D (P^{-1} P) \dots (P^{-1} P) D P^{-1} = P D^k P^{-1} \end{aligned}$$

De matrix D is een zogenaamde *diagonaalmatrix*, er komen enkel niet nul elementen voor op de hoofddiagonaal. Het is heel gemakkelijk om D^k te bepalen voor een willekeurig natuurlijk getal!

De matrix D is een zogenaamde *diagonaalmatrix*, er komen enkel niet nul elementen voor op de hoofddiagonaal. Het is heel gemakkelijk om D^k te bepalen voor een willekeurig natuurlijk getal!

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Dus

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Dus

$$A^k = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-3}{8} \end{pmatrix}$$

of nog

$$A^k = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^k & 3 - 3(0.92)^k \\ 5 - 5(0.92)^k & 5 + 3(0.92)^k \end{pmatrix}$$

Na 20 jaar is de verdeling

$$A^{20} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^{20} & 3 - 3(0.92)^{20} \\ 5 - 5(0.92)^{20} & 5 + 3(0.92)^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

We vinden ook

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^k & 3 - 3(0.92)^k \\ 5 - 5(0.92)^k & 5 + 3(0.92)^k \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Na 20 jaar is de verdeling

$$A^{20} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^{20} & 3 - 3(0.92)^{20} \\ 5 - 5(0.92)^{20} & 5 + 3(0.92)^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

We vinden ook

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^k & 3 - 3(0.92)^k \\ 5 - 5(0.92)^k & 5 + 3(0.92)^k \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Dus de bevolkingsverdeling zal, na “vele” jaren, stabiliseren als volgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

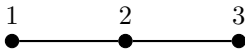
3. Grafen en matrices

De adjacentiematrix van een graaf

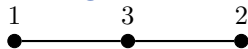
Definitie 4.1.1

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige ongerichte graaf is op n toppen. We kunnen de toppen voorstellen door de verzameling $\{1, \dots, n\}$. De *adjacentiematrix* is de matrix $A = (a_{ij})$, waarvoor $a_{ij} = 1 \iff i \sim j$ en $a_{ij} = 0 \iff i \not\sim j$.

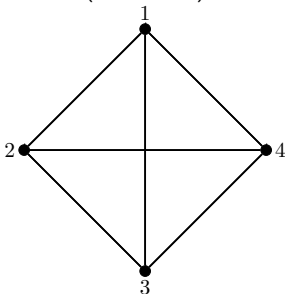
De adjacenciematrix van een graaf



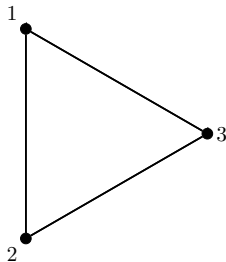
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

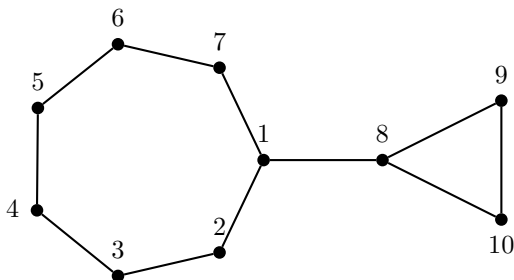


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix

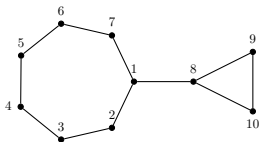


Oefening 4.1.2

Beschouw de bovenstaande graaf op 10 toppen. Bepaal zijn adjacentiematrix.

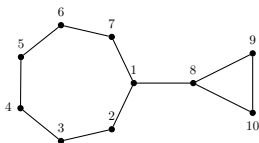


Matrices en grafen: adjacentiematrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix



Oefening 4.1.4

Beschouw de vier grafen K_4 , C_3 , P_3 en de bovenstaande graaf. Bepaal voor elke van deze grafen het product van hun adjacentiematrix met de all-one vector. Wat valt je op?



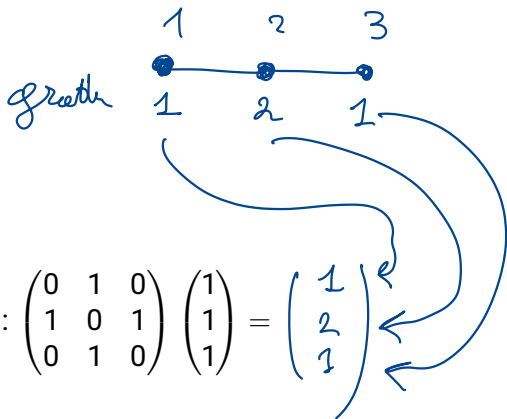
Matrices en grafen: adjacentiematrix

$$K_4: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix

$$C_3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix



Stelling

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige, ongerichte graaf is op $n > 0$ toppen. We stellen $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ en noteren de adjacentiematrix van Γ als A . Dan is $A\mathbf{1} = \vec{b}$ met $\vec{b} = (b_i)$ en $b_i = \deg(i)$. Met andere woorden, de vector \vec{b} is de vector uit \mathbb{R}^n met op positie i de graad van top i .

Definitie 4.1.6

Een graaf is regulier als alle toppen dezelfde graad hebben. Een k -reguliere graaf is een graaf waarvan alle toppen graad $k > 0$ hebben.

Definitie 4.1.6

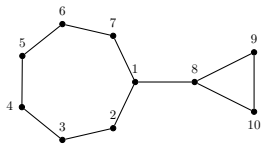
Een graaf is regulier als alle toppen dezelfde graad hebben. Een k -reguliere graaf is een graaf waarvan alle toppen graad $k > 0$ hebben.

Gevolg 4.1.8

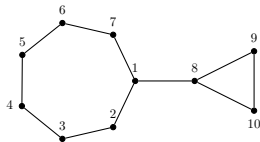
Een enkelvoudige graaf met adjacentiematrix A is k -regulier als en slechts als $\mathbf{1}$ een eigenvector is van A met eigenwaarde k .

Definitie 4.1.10

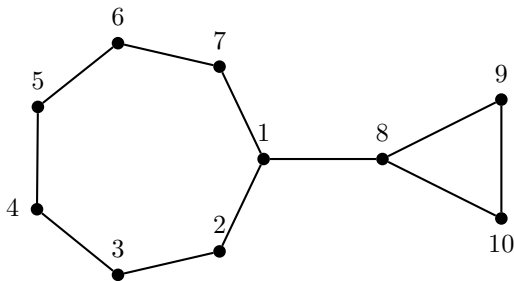
Veronderstel dat Γ een enkelvoudige graaf is op n toppen. De *graadmatrix* van Γ is de matrix $D = (d_{ij})$ waarvoor $d_{ii} = \text{deg}(i)$ en $d_{ij} = 0$ als $i \neq j$. De *Laplacematrix* van Γ is de matrix $L = D - A$, met A de adjacentiematrix van Γ .



$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$




$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$





Oefening 4.1.11

Beschouw de vier grafen K_4 , C_3 , P_3 en de bovenstaande graaf. Bepaal voor elke van deze grafen het product van hun Laplacematrix met de all-one vector. Wat valt je op?




$$K_4: \begin{pmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


$$C_3: \begin{pmatrix} +2 & -1 & -1 \\ -1 & +2 & -1 \\ -1 & -1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


$$P_3: \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 \\ -1 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix



We noteren de *all-one vector* als $\mathbf{1}$.

We noteren de *all-one vector* als $\mathbf{1}$.

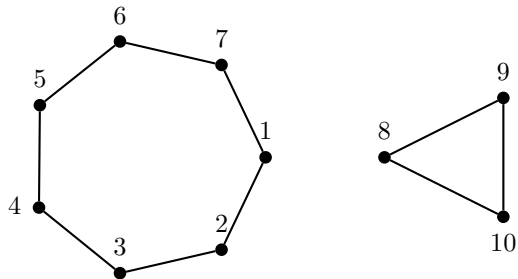
Stelling 4.2.12

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige, ongerichte graaf is op $n > 0$ toppen. Dan is $\mathbf{1}$ een eigenvector van de Laplacematrix van Γ met eigenwaarde 0.

Definitie

Een enkelvoudige graaf is *samenhangend* als er voor elk paar toppen u en v een pad bestaat tussen u en v . Een graaf die niet samenhangend is, bestaat uit verschillende *samenhangscomponenten*. Tussen elke twee samenhangscomponenten bestaan er geen bogen.

Onsamenhangende graaf: voorbeeld



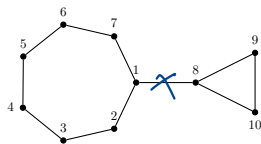
Stelling

Veronderstel dat Γ een samenhangende enkelvoudige graaf is. Dan heeft de eigenruimte van de Laplacematrix van Γ horend bij de eigenwaarde 0 dimensie 1.

Gevolg

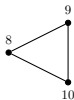
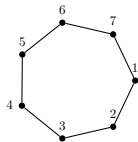
Het aantal samenhangende componenten van een enkelvoudige graaf is gelijk aan de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 0 van de Laplacematrix.

Laplacematrix van (on)samenhangende grafen



$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van (on)samenhangende grafen



$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

De vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = zijn *lineair onafhankelijk*. De

meetkundige dimensie van 0 als eigenwaarde van L is 2.

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Daaruit volgt dat twee eigenvectoren van de Laplacematrix met een *verschillende* eigenwaarde, staan loodrecht!

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

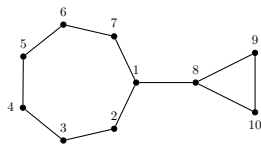
Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Daaruit volgt dat twee eigenvectoren van de Laplacematrix met een *verschillende* eigenwaarde, staan loodrecht!

Gevolg

De tweede kleinste eigenwaarde van de Laplacematrix van een samenhangende ongerichte graaf is verschillend van 0 en elke bijhorende eigenvector staat loodrecht op de all-one vector.

Fiedlervector en graph cut



$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

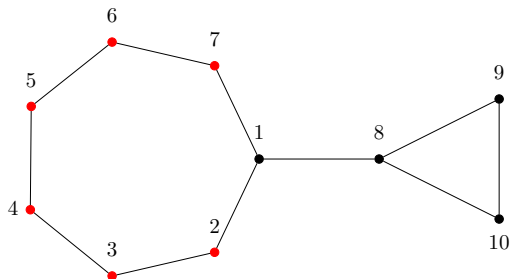
De eigenwaarden van L zijn 0, 0.2375, 0.7530, 1.0, 2.4450, 2.5633, 3.0, 3.4832, 3.8019 en 4.7159. Een Fiedlervector van lengte 1 is

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.0521 \\ -0.1147 \\ -0.2543 \\ -0.3335 \\ -0.3335 \\ -0.2543 \\ -0.1147 \\ 0.3734 \\ 0.4897 \\ 0.4897 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

We kunnen een Fiedlervector gebruiken om een zogenaamde **graph cut** te bekomen: een partitie van de toppen in twee verzamelingen waartussen het aantal bogen “klein” is.

Fiedlervector en graph cut



$$\begin{pmatrix} 0.0521 \\ -0.1147 \\ -0.2543 \\ -0.3335 \\ -0.3335 \\ -0.2543 \\ -0.1147 \\ 0.3734 \\ 0.4897 \\ 0.4897 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

De tweede kleinste eigenwaarde van de Laplacematrix is een maat voor de “connectiviteit” van de graaf.

De similarity graph van een dataset



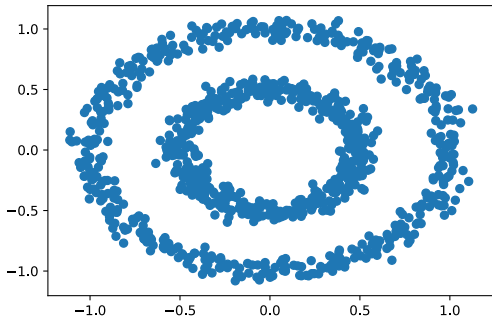
- ▶ We associëren een **gewogen, ongerichte en complete graaf** aan een dataverzameling.
- ▶ De toppen zijn de datapunten
- ▶ Het gewicht van een boog is een getal tussen dat bepaalt hoe sterk twee datapunten op elkaar lijken.

De similarity graph van data



- ▶ Noteer het gewicht van de boog die toppen i en j verbindt als $w(i, j)$.
- ▶ De adjacentiematrix definiëren we als $a_{ij} = w(i, j)$.
- ▶ De graad van top i wordt dan $\text{deg}(i) = \sum_j w(i, j)$.
- ▶ De Laplacematrix blijft $L = D - A$, en zijn eigenschappen veranderen niet!

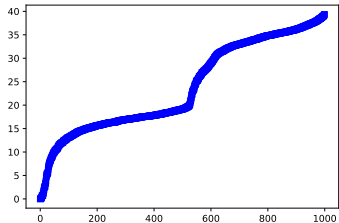
De similarity graph van data



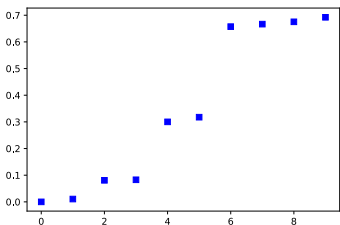
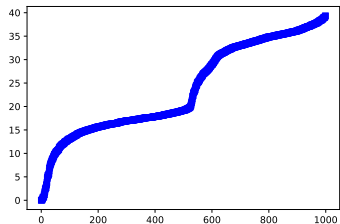
De similarity graph van data

- ▶ $w(i, j) = e^{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ We verwachten dat er een sprong te zien is tussen de tweede kleinste en derde kleinste eigenwaarde van L .

De similarity graph van data



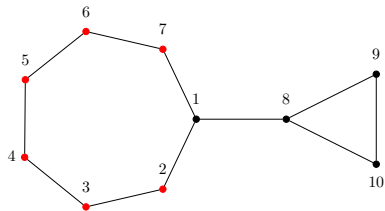
De similarity graph van data



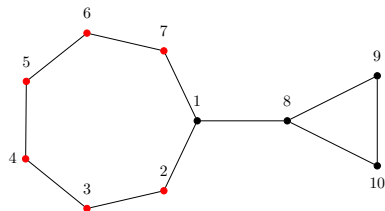
Spectrale clustering van data

1. Bepaal de gewogen Laplacematrix L van de similarity graph.
2. Bepaal de k kleinste eigenwaarden van L
3. Gebruik de bijhorende eigenvectoren als kolommen van een matrix U
4. Pas het k -means algoritme toe op de **rijen** van de matrix U . Dit levert een partitie van de toppen in k verzamelingen.

Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data

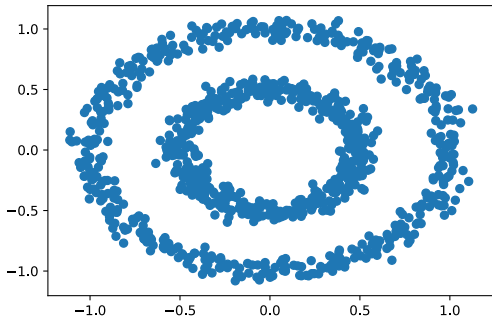


$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0521 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix}$$

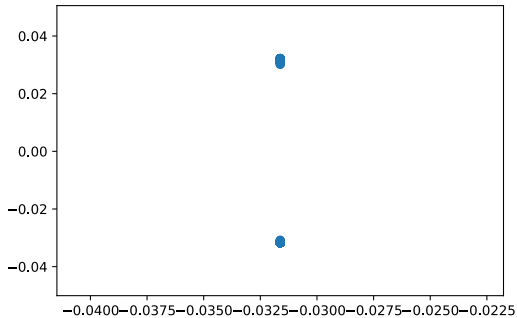
Spectrale clustering van data

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0521 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.0521 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix}$$

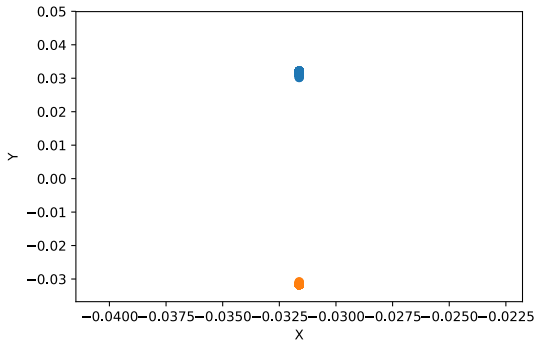
Spectrale clustering van data



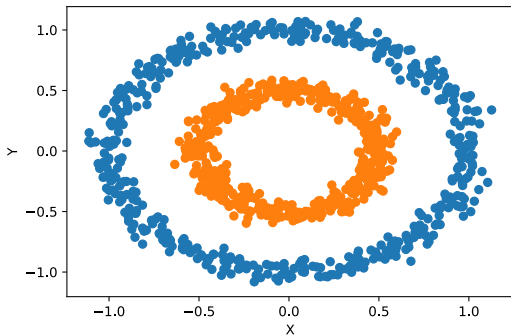
Spectrale clustering van data



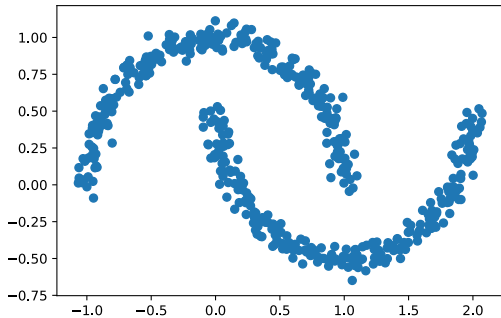
Spectrale clustering van data



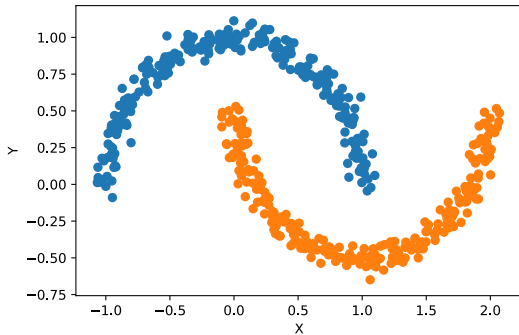
Spectrale clustering van data



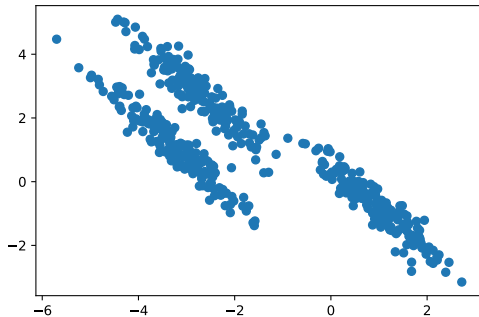
Spectrale clustering van data



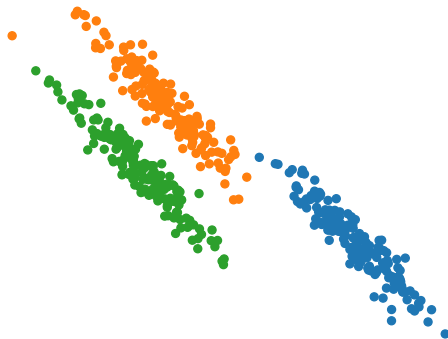
Spectrale clustering van data



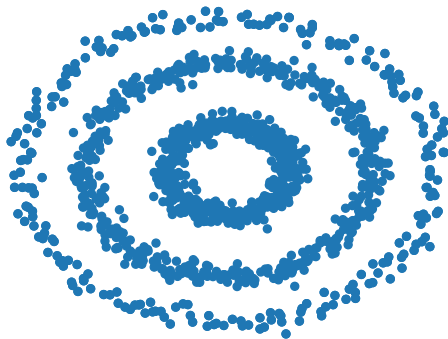
Spectrale clustering van data



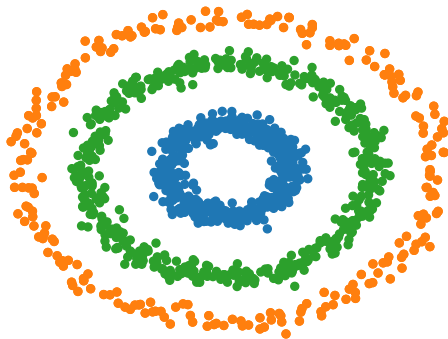
Spectrale clustering van data



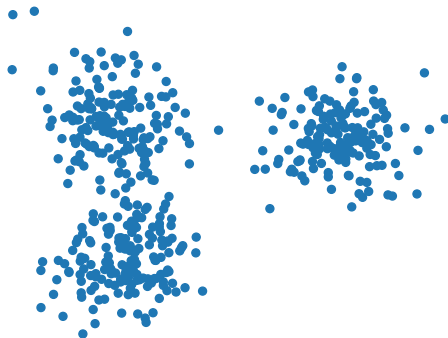
Spectrale clustering van data



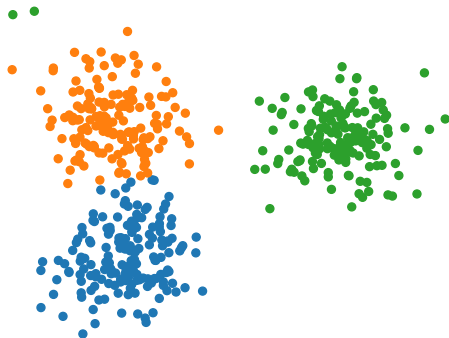
Spectrale clustering van data



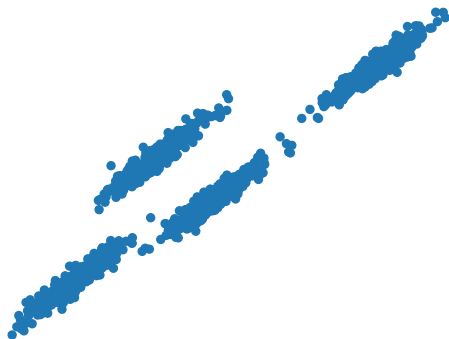
Spectrale clustering van data



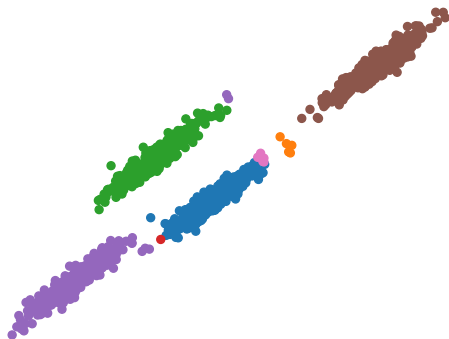
Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data



Google search results for "wiskunde in brussel". The browser address bar shows "wiskunde in brussel". The search bar contains "wiskunde in brussel". The results show:

- About 1.150.000 results (0,38 seconds)
- <https://wiskundeinbrussel.be> · Translate this page
Wiskunde in Brussel
Manneken Pis krijgt een kostuum van de vakgroep **Wiskunde** en Data Science; Inschrijven van 1/09/2021–30/09/2021 + finale dag op pi-dag.
- <https://www.vub.be> · opleiding · wis... · Translate this page
Wiskunde | Vrije Universiteit Brussel
Ben je geboeid door toepassingen van de **wiskunde** in gebieden zoals de fysica, de computerwetenschappen, de economische wetenschappen of data science? Aan de VUB ...
- <https://we.vub.ac.be> · wiskunde · Translate this page
Wiskunde | Vrije Universiteit Brussel
Wiskunde. Bachelor. Bachelor of Science in de **Wiskunde** en Data Science ... 2014-2022 · Vrije Universiteit Brussel · Pleinlaan 2 · 1050 Elsene · T: +32 2 629 ...
- <https://we.vub.ac.be> · master-science... · Translate this page
Master of Science in de Wiskunde | Vrije Universiteit Brussel
Meesterlijk door je master. Hou jij van abstract denken en stel je graag alles in vraag? · Fundamentele **wiskunde**. Deze optie is het meest op onderzoek ...
- <https://www.apprentus.com> · nl-be · Translate this page
Privélessen voor Wiskunde in Brussel - Apprentus
Wiskunde lessen in Brussel. Leer **wiskunde** met onze leraren, thuis of bij de leraar, welk niveau je ook hebt, beginner gevorderde. Onze **wiskunde** leraren ...
★★★★★ Rating: 4,8 · 42 reviews

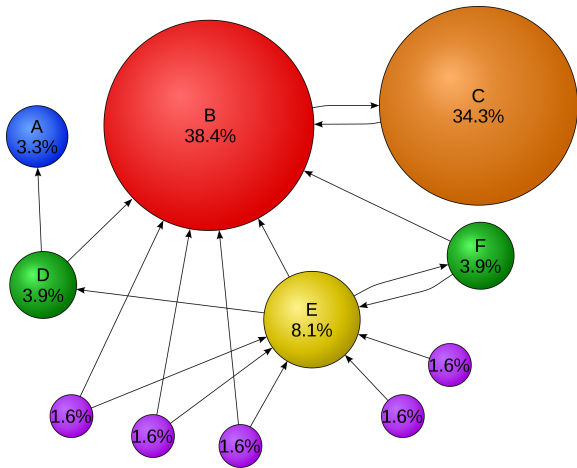


- ▶ het internet is een gerichte multigraaf
- ▶ de *uitgraad* van een top is het aantal bogen (dus links) dat uit die top vertrekt.
- ▶ We noteren de uitgraad van top x als d_x .
- ▶ de *ingraad* van een top is het aantal bogen met die top als eindpunt.
- ▶ het gedrag van een gebruiker is een *random walk*

- ▶ Een gebruiker begint op een pagina en volgt, willekeurig, de beschikbare links;
- ▶ ofwel verlaat de gebruiker de pagina en zoekt een willekeurige andere pagina, met waarschijnlijkheid $1 - \alpha$.
- ▶ De *pagerank* van een pagina x is een getal $u_x \in [0, 1]$.
- ▶ Pagina's relevant voor een bepaalde zoekterm worden weergegeven volgens hun pagerank.
- ▶ De pagerank van een pagina u_x is gedefinieerd als

$$u_y = \frac{1 - \alpha}{n} + \alpha \sum_{x \rightarrow y} \frac{u_x}{d_x}.$$

Google PageRank



- ▶ We definiëren de gewogen adjacentiematrix van de graaf die het internet modelleert als volgt: $a_{ij} = m \geq 0$ als er $m \in \mathbb{N}$ bogen zijn $x \rightarrow y$.
- ▶ De matrix D is de *uitgraadmatrix*: op d_{ii} bevindt zich de uitgraad van i .
- ▶ Veronderstel dat $d_{ii} \neq 0$ voor alle toppen i . Definieer $S = D^{-1}A$. Voor de matrix S geldt dat de som van elke rij gelijk is aan 1, dus

$$S\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

- ▶ De matrix S modelleert de random walk!



- ▶ De kans dat de gebruiker naar een willekeurige pagina gaat zonder de links te volgen is $1 - \alpha$.
- ▶ Noem n het totaal aantal pagina's. Definieer

$$M = \frac{1 - \alpha}{n} J + \alpha S.$$

- ▶ Opnieuw geldt $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$.



- ▶ De eigenwaarde 1 is, in absolute waarde, de grootste eigenwaarde van M . De bijhorende eigenruimte is 1-dimensionaal en wordt opgespannen door de vector $\mathbf{1}$.
- ▶ De eigenwaarde 1 is, in absolute waarde, ook de grootste eigenwaarden van M ten opzichte van de *linkse* eigenwaarden. Een *linkse* vector is een rijvector die we aan de linkerkant met M kunnen vermenigvuldigen. Het begrip *linkse eigenvector* is, mutatis mutandis, analoog aan het begrip *rechtste eigenvector*.



- ▶ Bij de eigenwaarde 1 hoort ook een 1-dimensionale eigenruimte E_1 van linkse eigenvectoren. Dus voor elke rijvector $\vec{u} \in E_1$ geldt $\vec{u}M = \vec{u}$.
- ▶ De gezochte linkse eigenvector kan iteratief gevonden worden door met een willekeurige vector \vec{v} te beginnen en steeds \vec{v} te vervangen door $\vec{v}M$, men kan aantonen dat deze rij dan steeds dichtert nadert naar de te bepalen vector \vec{u} .

Nu geldt dus voor $\vec{u} \in E_1$ dat

$$(uM)_y = \frac{1-\alpha}{n}(uJ)_y + \alpha(uS)_y = \frac{1-\alpha}{n} \sum_y u_y + \alpha \sum_x u_y S_{xy}$$

We kunnen \vec{u} gemakkelijk normeren zodat $\sum_y u_y = 1$, dan geldt

$$u_y = (uM)_y = \frac{1-\alpha}{n} + \alpha \sum_{x \rightarrow y} \frac{u_x}{d_x},$$

Waarbij de term $\frac{u_x}{d_x}$ evenveel keer optreedt als het aantal verbindingen van x naar y .



- ▶ Pagina x is een *dangling page* als $d_x = 0$.
- ▶ Een mogelijke oplossing: veronderstel een link van x naar alle andere pagina's.
- ▶ Met deze oplossing bestaat D^{-1} en kan S bepaald worden.
- ▶ De berekening van de gezochte pagerank vector \vec{u} kan op een efficiënte wijze!

Fundamentele vs. Toegepaste wiskunde



Is er nog fundamentele wiskunde nodig?

When it's advanced, any topic becomes mathematical. Whether it's economics, social science, psychology, anything I can think of, ultimately, will be mathematical

(Lek-Heng Lim)

Fundamentele vs. Toegepaste wiskunde

When it's advanced, any topic becomes mathematical. Whether it's economics, social science, psychology, anything I can think of, ultimately, will be mathematical

(Lek-Heng Lim)

Lek-Heng Lim zoekt oplossingen voor problemen in het domein machine learning door fundamentele wiskunde, zoals algebra, meetkunde en topologie te gebruiken

<https://www.quantamagazine.org/>

[an-applied-mathematician-strengthens-ai-with-pure-math-20230301/](https://www.quantamagazine.org/an-applied-mathematician-strengthens-ai-with-pure-math-20230301/)

Zuiver toegepaste zuivere wiskunde

- ▶ Moderne toepassingen zijn niet mogelijk zonder een grondige kennis van fundamentele wiskunde: analyse, algebra, meetkunde, discrete wiskunde, topologie, statistiek, ...
- ▶ De toegepaste wiskunde ontwikkelt en onderzoekt wiskunde met als doel ze toe te passen, hand in hand met het onderzoek in de zuivere wiskunde. De zuivere wiskunde onderzoekt wiskunde met als doel ze beter te begrijpen.
- ▶ Elke opleiding wiskunde bestaat dan ook uit fundamentele én toegepaste wiskunde. Studenten kiezen zelf hoever ze in elk van de richtingen willen gaan.
- ▶ Elke opleiding wiskunde is breed, ze heeft ook aandacht voor de *toepassingsgebieden* zelf, b.v. data science, maar ook fysica, computerwetenschappen, etc.

Waarom wiskunde studeren ...



- ▶ Als je graag wiskunde doet,
- ▶ omdat je het een leuke uitdaging vindt om wiskundige problemen aan te pakken...
- ▶ als je gedreven bent om die abstracte structuren en wiskundige stellingen te begrijpen...
- ▶ als je wil weten wat er aan de basis ligt van de wereld rondom ons
- ▶ Als je deel wil uitmaken van de oplossing van maatschappelijke problemen.

Wiskunde is overal



- ▶ Afgestudeerde wiskundigen worden aangeworven omwille van hun vaardigheden
- ▶ *Het netwerk gedraagt zich op een bepaalde manier. Bij telenet gaan we daarin op zoek naar patronen. Daarvoor hebben we wiskundigen en data scientists nodig. (Dieter Platel, ingenieur en schakelstudent wiskunde, Telenet)*
- ▶ *Bij AtlasCopco beschikken ze over heel veel data, en ze zijn nu pas begonnen om deze op een meer wiskundige wijze te analyseren (Lynn Boen, alumna)*

Jobs, jobs, jobs!

- ▶ Wiskundigen kunnen in uiteenlopende sectoren en bedrijven aan de slag, omwille van hun analytische skills en probleemoplossend vermogen.
- ▶ Financiële sector: heel veel verschillende jobs: data-analyse, risico-analyse, audits, actuariële functies, ...
- ▶ Industriële sector: bedrijven zoals Agfa-Gevaert, Materialise (medische beeldvorming en apparatuur), IBM (Quantum computing e.a.), Robovision (AI toepassingen)
...
- ▶ IT sector: functionele analyse en ontwikkeling van software (Colruyt) of AmpliData (digital storage), ...
- ▶ Consultancy: algemene bedrijfsproblemen oplossen, zoals Conundra (supply chain management), EORTC (klinische consultancy, onderzoek naar behandeling tegen kanker)...
- ▶ Onderwijs: **gi-gan-tisch** tekort aan **goed geschoolde leerkrachten wiskunde!**

Kan je wel (genoeg) geld verdienen als wiskundige?

Kan je wel (genoeg) geld verdienen als wiskundige?

Het gemiddelde salaris van een master wiskunde in België is **hoger** dan dat van een fysicus, scheikundige én ingenieur!

Bron: <https://www.stepstone.be/carriere-tips/de-8-bestbetaalde-jobs-ons-land/>

Kan je wel (genoeg) geld verdienen als wiskundige?



Bron: <https://www.consultancy.nl/nieuws/8220/>

deloitte-groot-tekort-betaspecialisten-bedreigt-economie

<https://platformwiskunde.nl/rapport-deloitte/>