Grafen, matrices en clustering van data

Jan De Beule

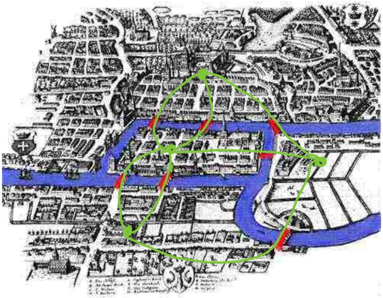
5 februari 2025

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

Overzicht

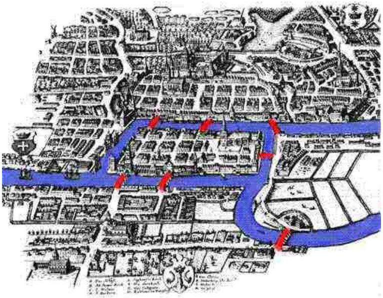
1. Grafen

Inleiding



Koningsbergen, 18e eeuw.

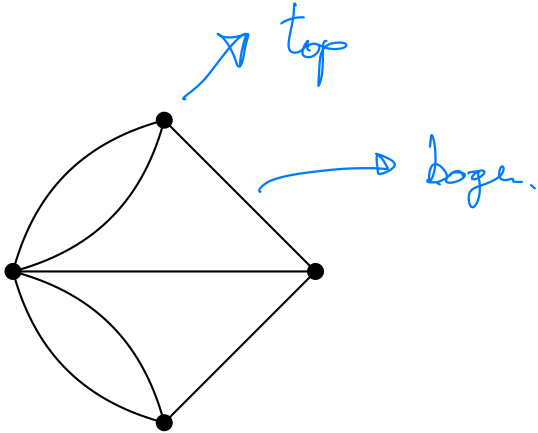
Inleiding



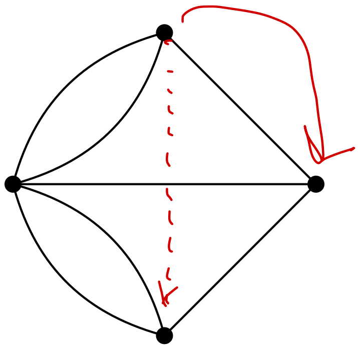
Vraagstuk van Euler (1707 – 1783)

Is het mogelijk om een wandeling te bepalen die elk van de zeven bruggen precies eenmaal gebruikt, en die eindigt in haar beginpunt?

Inleiding

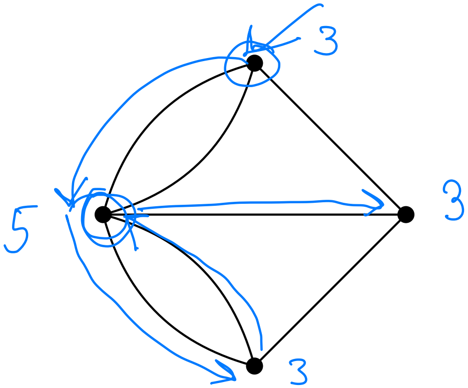


Inleiding



Een wandeling of pad is een opeenvolging van punten die verbonden zijn door een *boog*. De gezochte wandeling moet dus elke boog precies eenmaal gebruiken.

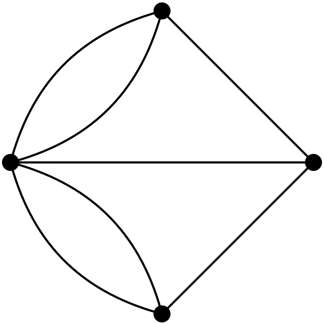
Inleiding



gevolg

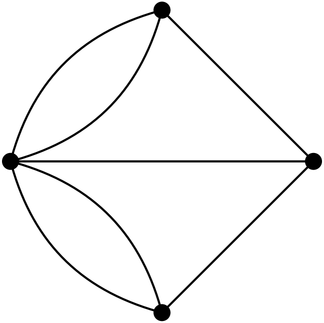
Elk punt van de gezochte wandeling in Eulers vraagstuk is bevat in een even aantal bogen.

Inleiding



Elke top is bevat in een **oneven** aantal bogen.

Inleiding



Resultaat

De gezochte wandeling bestaat **niet**.

Grafen

Definitie 1.2.1

Een *graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een verbinding tussen twee toppen zonder richting. Als de graaf geen *lussen* bevat, noemen we hem *enkelvoudig*.

Definitie 1.2.1

Een *graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een verbinding tussen twee toppen zonder richting. Als de graaf geen *lussen* bevat, noemen we hem *enkelvoudig*.

Notatie

We noteren $x \sim y$ als de toppen x en y adjacent zijn, of dus als het paar $\{x, y\}$ een boog is.

Grafen

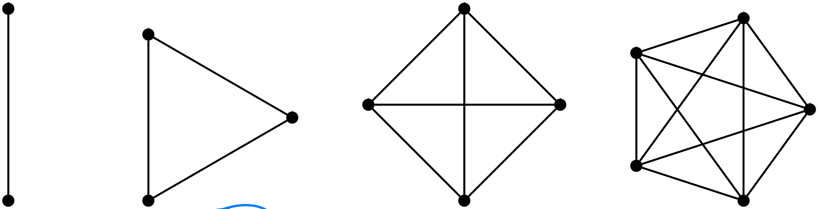
Definitie 1.2.1

Een *graaf* is een structuur die bestaat uit *toppen* en *bogen*. Een *boog* is een verbinding tussen twee toppen zonder richting. Als de graaf geen *lussen* bevat, noemen we hem *enkelvoudig*.

Definitie

Indien twee toppen door meer dan één boog met elkaar verbonden kunnen zijn, dan noemen we de graaf een *multigraaf*.

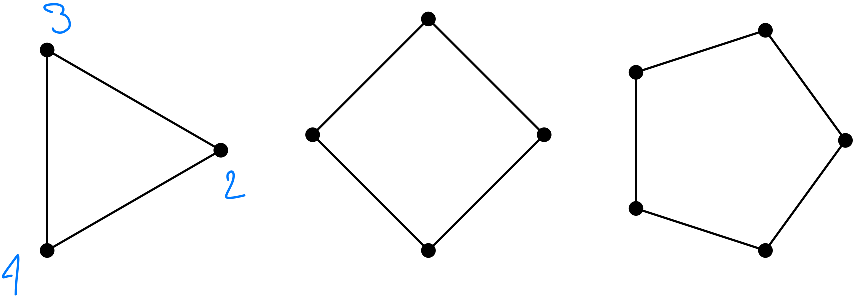
Voorbeelden



Complete grafen op 2,3,4 en 5 toppen

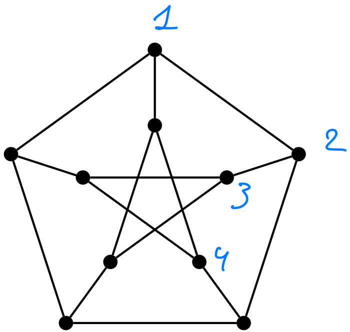
↳ elke 2 toppen zijn verbonden.

Voorbeelden



Cykelgrafen op 3,4 en 5 toppen

Voorbeelden



De Petersengraaf

Voorbeelden

Facebookgraaf

- De verzameling van toppen is de verzameling van alle gebruikers van facebook
- Twee toppen zijn adjacent als de gebruikers bevriend zijn.

Voorbeelden

Facebookgraaf

- De verzameling van toppen is de verzameling van alle gebruikers van facebook
- Twee toppen zijn adjacent als de gebruikers bevriend zijn.

Wist je dat

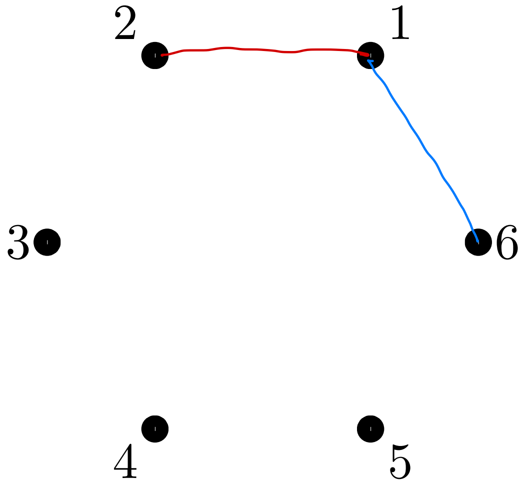
er in een groep van 6 willekeurige facebookgebruikers steeds ofwel minstens 3 ervan allemaal met elkaar bevriend zijn, ofwel minstens 3 ervan allemaal vreemden zijn?

Facebookgraaf

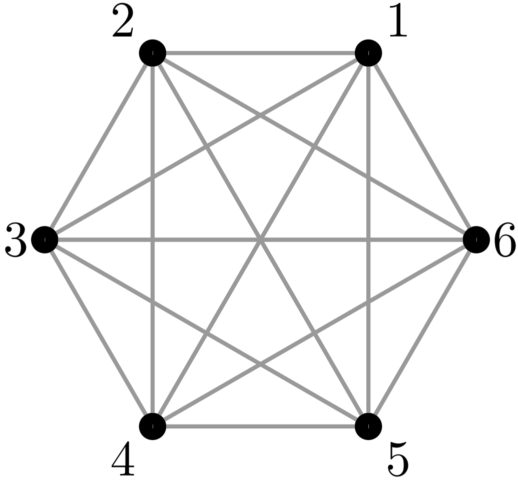
Stelling

In een groep van 6 willekeurige facebookgebruikers is er steeds een groepje van ofwel minstens 3 vrienden, ofwel minstens 3 voor elkaar onbekenden.

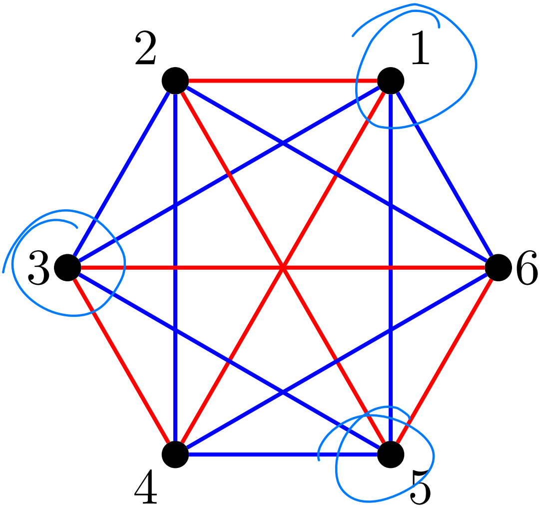
Facebookgraaf



Facebookgraaf



Facebookgraaf



Zoek de rode of blauwe complete graaf op drie toppen!

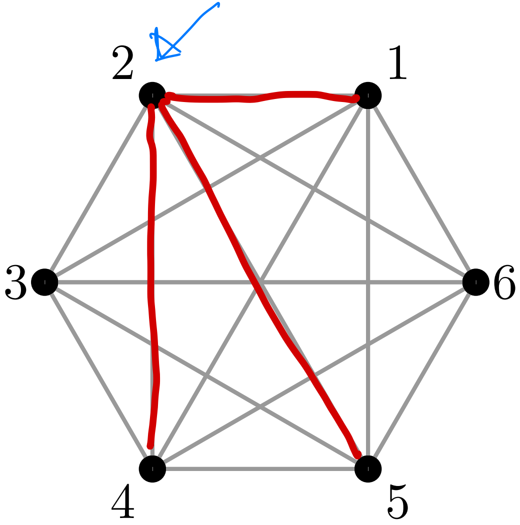
Facebookgraaf

Te bewijzen

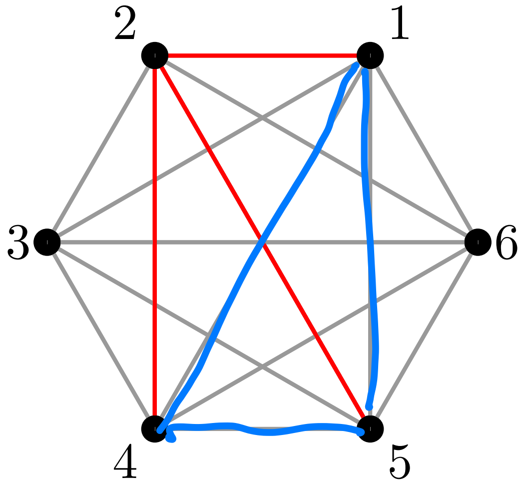
Elke 2-kleuring van de bogen bevat ofwel een rode, ofwel een blauwe complete graaf op 3 toppen.

Het aantal verschillende 2-kleuringen van de bogen van een complete graaf op 6 toppen is 156.

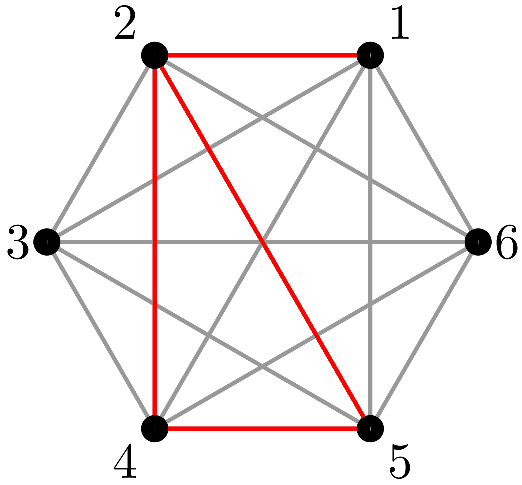
Facebookgraaf



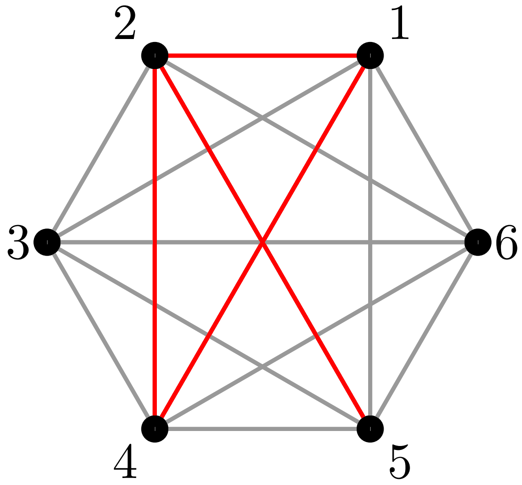
Facebookgraaf



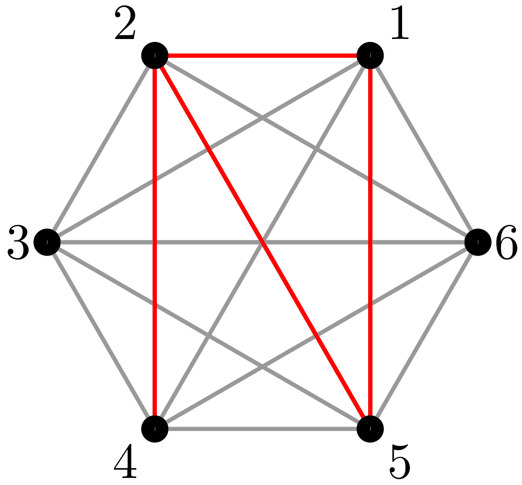
Facebookgraaf



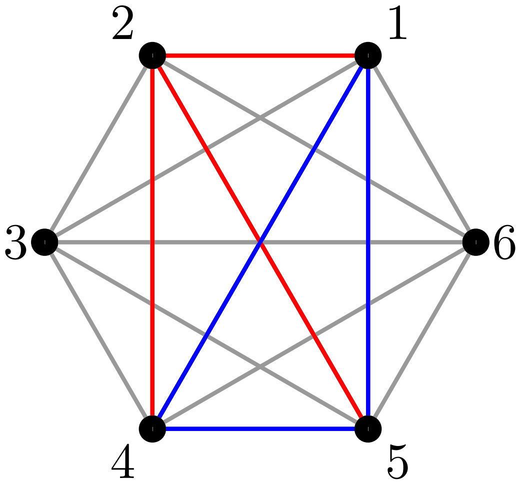
Facebookgraaf



Facebookgraaf



Facebookgraaf



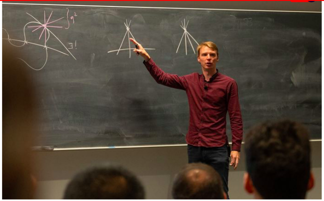
Facebookgraaf

01 1
02 2
03 4
04 11
05 34
06 156
07 1044
08 12346
09 274668
. . .
25 1313313935698955194321615484058168901463892147061464833804 58576384
26 169487618400693135671278778610295749756246061427513800357039083537927168
27 421260006519643885757174107650953992882782878952295704539600450662355704738816
28 2019295999678571395728328980890810345860807065053566265347514137546665672316696821760
29 18691352722478956041683441055221773100906878077027397169675907651818104181986752359177684992
30
334494316309257669249439569928080028956631479935393064329967834887217734534880582749030521599504384

Kan je met wiskunde beroemd worden?

Ons onderzoek in het vakgebied dat aan de basis ligt van het onderwijs, is van wereldniveau.

HLN NIEUWS SPORT SHOWBIZZ NINA REGIO VIDEO PUZZEL PODC



Sam Mattheus legt zijn bevindingen uit aan de universiteit in Pittsburgh. © Carnegie Mellon University

Jonge Vlaming zorgt voor doorbraak in wiskunde: Sam Mattheus (29) kraakt aartsmoeilijke code

Een wiskundig probleem waar specialisten al decennia de tanden op stukbijten, is opgelost. En het is een jonge Vlaming die de code heeft gekraakt. Sam Mattheus (29), doctor aan de VUB, staat nog maar aan het begin van zijn academische carrière, maar krijgt nu al lof uit alle hoeken van de wereld.

VUB Press — Wetenschapsnieuws

VUB-onderzoeker lost decennia oud wiskundig probleem op

Dr. Sam Mattheus (29) bereikt baanbrekend resultaat in de Ramsey-theorie

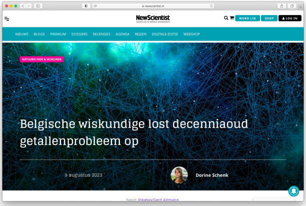
Hoe los je een wiskundig probleem op waar al veertig jaar geen vooruitgang in is geboekt? Dr. Sam Mattheus, verbonden aan de Vrije Universiteit Brussel, vertrok voor een jaar naar de Verenigde Staten om het uit te zoeken. Hij combineerde zijn kennis over de eindige meetkunde met de klassieke grafentheorie en loste niet alleen een decennia oud probleem op, maar biedt een innoverend alternatief voor de huidige aanpak van Ramsey-problemen. "Ook om andere Ramsey-getallen te berekenen, kan de eindige meetkunde hopelijk oplossingen bieden", zegt Mattheus.

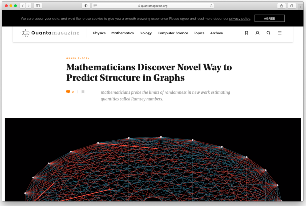
Het vraagstuk dat Mattheus oploste, kadert binnen de zogenaamde Ramsey-getallen. Dat zijn fundamentele grootheden die de grenzen van mogelijke wanorde weergeven. Ze zijn vooral notoir moeilijk te berekenen. Toch slaagde Mattheus er na enkele maanden al in, in samenwerking met prof. Jacques Verstraete van de University of California San Diego (UCSD). "Het was voor ons ook een grote verrassing", zegt Mattheus. "Het was lange tijd niet duidelijk hoe we het gingen aanpakken en of het überhaupt zou lukken." Op een dag wandelde Mattheus het bureau van Verstraete binnen met een idee.

http://prez.ly/8o3c

Kan je met wiskunde beroemd worden?

Ons onderzoek in het vakgebied dat aan de basis ligt van het onderwijs, is van wereldniveau.





https://www.quantamagazine.org/mathematicians-discover-new-way-to-predict-structure-in-graphs-20230622/ https://www.newscientist.nl/nieuws/belgische-wiskundige-lost-decenniaoud-probleem-op/

Kan je met wiskunde beroemd worden?

Jan Danckaert
2u ·

VUB has a solid traditiion in groundbreaking mathematical research (with colleagues like Bourgain, Daubechies, Delbaen, ...). I'm thrilled to see that the young generation of mathematicians follows up on this tradition. Congratulations!

VUB.BE

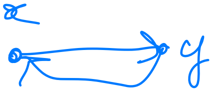
VUB researcher solves decades-old maths problem

Dr. Sam Matthew combined his knowledge of geometry with classical graph theory and dis...

Is dit eigenlijk allemaal wel nuttig?

- Wiskunde heeft directe en indirecte toepassingen.
- Grafentheorie heeft heel veel toepassingen in computerwetenschappen, economie, biomedische wetenschappen, artificiële intelligentie, data science, etc. en, uiteraard, in de **wiskunde** zelf.
- Het *facebookprobleem* is het topje van de ijsberg in de zogenaamde Ramsey-theorie ...
- ... een theorie die je kan omschrijven als de studie van *geordende structuren* die noodzakelijk ontstaan in een chaotisch systeem.

Voorbeelden



Internetgraaf

- De verzameling van toppen is de verzameling van alle websites
- Dit is een voorbeeld van een gerichte graaf. Een website kan verwijzen *naar* een andere website, maar dit is niet noodzakelijk omgekeerd.

$$\{x, y\} \to (x, y)$$

Voorbeelden

Internetgraaf

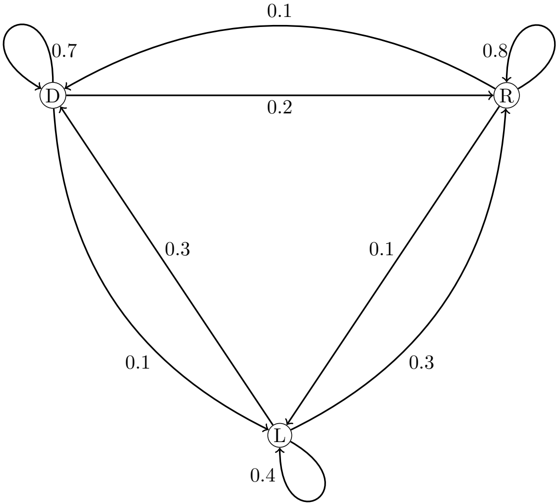
- De verzameling van toppen is de verzameling van alle websites
- Dit is een voorbeeld van een gerichte graaf. Een website kan verwijzen *naar* een andere website, maar dit is niet noodzakelijk omgekeerd.

Voorbeelden

Gerichte grafen

Dit is een voorbeeld van een *gerichte* graaf. De bogen tussen twee toppen hebben een *richting*. We duiden ze aan met een pijl.

Voorbeelden



Voorbeelden

Spoorwegengraaf

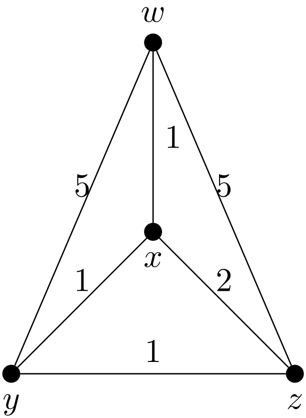
- De verzameling van toppen is de verzameling van alle stations
- Twee stations zijn verbonden als er een rechtstreekse verbinding tussen bestaat.
- Bij elke verbinding kunnen we de tijd bijhouden die nodig is om de afstand af te leggen.

Voorbeelden

Gewogen grafen

Dit is een voorbeeld van een gewogen graaf. De bogen tussen twee toppen hebben een *gewicht*

Voorbeelden



Overzicht

2. Vectoren en matrices

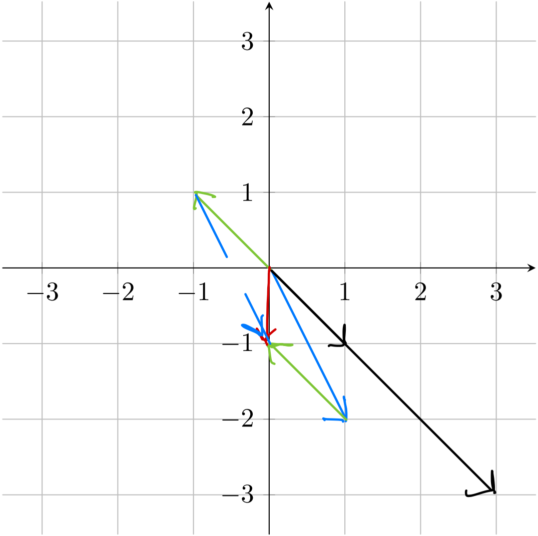
Vectoren

- Een vector is een “algebraïsch” object: je kan er mee rekenen.
- Analytische meetkunde is heel sterk afhankelijk van vectoren en bijhorende berekeningen.

Vectoren

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vectoren



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vectoren

Inproduct en lengte van een vector

Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

De lengte van een vector $\vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Vectoren

Inproduct en lengte van een vector

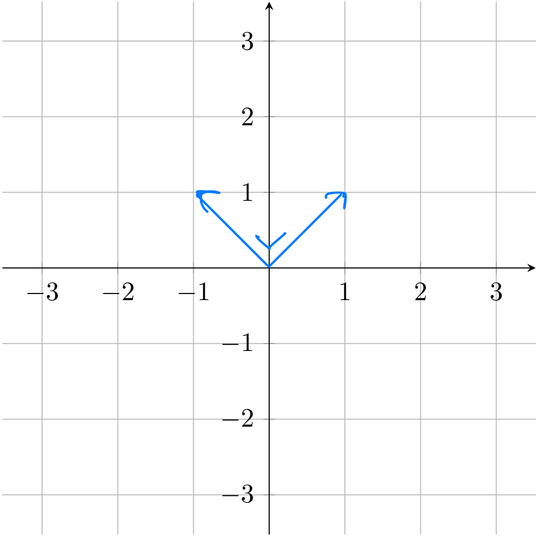
Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

De lengte van een vector $\vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn loodrecht (of orthogonaal) als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Vectoren



Matrices

- Een matrix is een “algebraïsch” object: je kan er mee rekenen.
- Je kan matrices bijvoorbeeld gebruiken om stelsels lineaire vergelijkingen mee op te lossen.
- Indien de “dimensies” het toelaten, kan je matrices met vectoren, en matrices met matrices vermenigvuldigen.

Matrices

Een $m \times n$-matrix (met coëfficiënten/componenten a_{ij})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Matrices

Optelling

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrices

Vermenigvuldiging met een scalair

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Matrices

Vermenigvuldiging met een vector

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$$

Matrices

Rotatie van $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ over hoek θ:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrices

Rotatie van $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ over hoek θ:

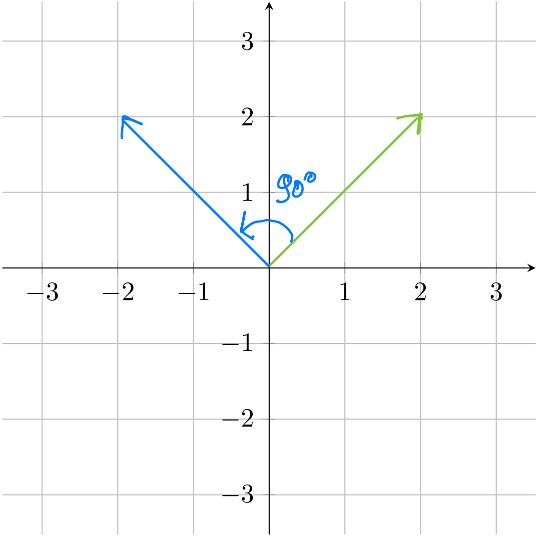
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotatiematrix over $\theta = 90^\circ$ in tegenwijzerzin is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Het vermenigvuldigen van matrices vereist op het eerste zicht nogal wat berekeningen.

Matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = A = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Reken na dat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

Dus als $ad - bc \neq 0$, dan geldt, met

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dat $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ We noteren $B = A^{-1}$, de *inverse matrix van A*.

Matrixvermenigvuldiging

Dus als $ad - bc \neq 0$, dan geldt, met

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dat $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ We noteren $B = A^{-1}$, de *inverse matrix van A*. Niet alle matrices hebben een inverse, b.v.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

heeft geen inverse.

Matrixvermenigvuldiging

Het matrixproduct is niet commutatief!

Matrixvermenigvuldiging

Het matrixproduct is niet commutatief!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

Het matrixproduct is niet commutatief!

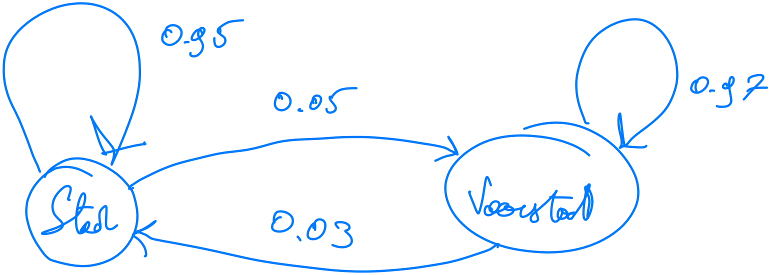
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Markovketens

In een stad met bijhorend voorstedelijk gebied, wil men op jaarbasis de verdeling van de bevolking in stad/voorstad modelleren. Na enkele tellingen blijkt dat er jaarlijks 5% van de bevolking uit de stad naar de voorstad verhuist, en 3% van de bevolking vanuit de voorstad naar de stad verhuist. Het overige deel van de bevolking in de stad, respectievelijk voorstad, blijft in de stad, respectievelijk voorstad. Op een bepaald ogenblik woont 60 % in de stad en 40 % in de voorstad en wil men een langetermijnvoorspelling maken en dus de verdeling over 10, 20, 30, . . . jaren inschatten.

Markovketens



$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.092 \end{pmatrix}$$

Markovketens

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{pmatrix}$$

Markovketens

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56544 \\ 0.43456 \end{pmatrix}$$

Markovketens

Na 20 jaar

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Definitie

Stel A is een vierkante matrix en $\vec{x}$ een vector verschillend van de nulvector. Als $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dan noemen we λ een eigenwaarde van A en $\vec{x}$ een bijhorende eigenvector.

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.92 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$PD \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0.92 \\ 5 & -0.92 \end{pmatrix}$$

$$AP \quad \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.92 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0.92 \\ 5 & -0.92 \end{pmatrix}$$

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

$$PD = AP \qquad\qquad P^{-1}$$

$$PDP^{-1} = A$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD\,.$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (0.92)^2 \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix}$$

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD\,.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^k = (PDP^{-1})^k$$
$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1})\cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

De matrix D is een zogenaamde *diagonaalmatrix*, er komen enkel niet nul elementen voor op de hoofddiagonaal. Het is heel gemakkelijk om D^k te bepalen voor een willekeurig natuurlijk getal!

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

De matrix D is een zogenaamde *diagonaalmatrix*, er komen enkel niet nul elementen voor op de hoofddiagonaal. Het is heel gemakkelijk om D^k te bepalen voor een willekeurig natuurlijk getal!

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD\,.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Dus

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Stel nu

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$AP = PD\,.$$

Dus

$$A = PDP^{-1}$$

Dus

$$A^k = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.92)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-3}{8} \end{pmatrix}$$

of nog

$$A^k = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 + 5(0.92)^k & 3 - 3(0.92)^k \\ 5 - 5(0.92)^k & 5 + 3(0.92)^k \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Na 20 jaar is de verdeling

$$A^{20}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3+5(0.92)^{20} & 3-3(0.92)^{20}\\ 5-5(0.92)^{20} & 5+3(0.92)^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$$

We vinden ook

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3+5(0.92)^{k} & 3-3(0.92)^{k}\\ 5-5(0.92)^{k} & 5+3(0.92)^{k}\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonalizatie

Na 20 jaar is de verdeling

$$A^{20}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3+5(0.92)^{20} & 3-3(0.92)^{20}\\5-5(0.92)^{20} & 5+3(0.92)^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$$

We vinden ook

$$\lim_{k\to\infty}A^k=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3+5(0.92)^{k} & 3-3(0.92)^{k}\\5-5(0.92)^{k} & 5+3(0.92)^{k}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 5\end{pmatrix}$$

Dus de bevolkingsverdeling zal, na “vele” jaren, stabiliseren als volgt

$$\lim_{k\to\infty}A^k\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.375\\0.625\end{pmatrix}$$

Overzicht

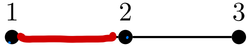
3. Grafen en matrices

De adjacentiematrix van een graaf

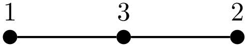
Definitie 4.1.1

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige ongerichte graaf is op n toppen. We kunnen de toppen voorstellen door de verzameling $\{1, \ldots, n\}$. De *adjacentiematrix* is de matrix $A = (a_{ij})$, waarvoor $a_{ij} = 1 \iff i \sim j$ en $a_{ij} = 0 \iff i \not\sim j$.

De adjacentiematrix van een graaf

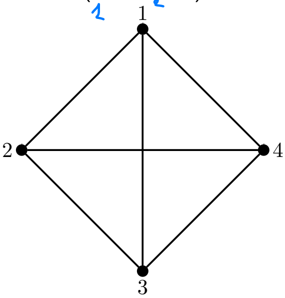


$$\begin{array}{cc} 1 & \\ 2 & \\ & \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

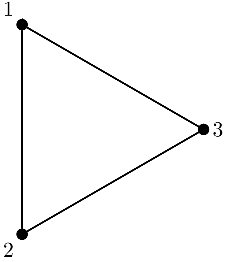


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 2

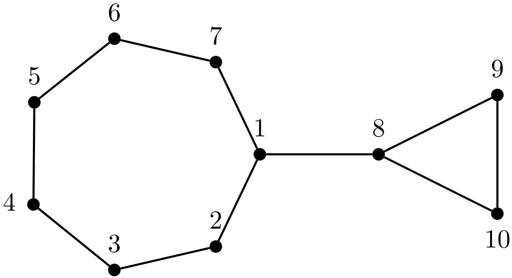


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

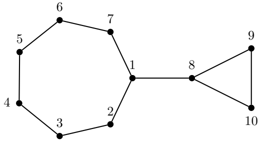
Matrices en grafen: adjacentiematrix



Oefening 4.1.2

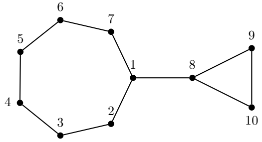
Beschouw de bovenstaande graaf op 10 toppen. Bepaal zijn adjacentiematrix.

Matrices en grafen: adjacentiematrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

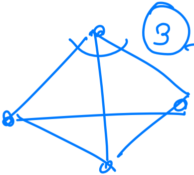
Matrices en grafen: adjacentiematrix



Oefening 4.1.4

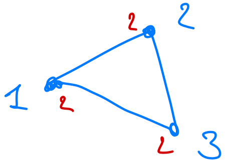
Beschouw de vier grafen K_4, C_3, P_3 en de bovenstaande graaf. Bepaal voor elke van deze grafen het product van hun adjacentiematrix met de all-one vector. Wat valt je op?

Matrices en grafen: adjacentiematrix



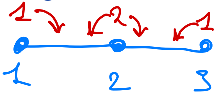
$$K_4: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix



$$C_3\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix



geen eigenvector van A

$$P_3\colon \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrices en grafen: adjacentiematrix

Stelling

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige, ongerichte graaf is op $n > 0$ toppen. We stellen $V(\Gamma) = \{1, \ldots, n\}$ en noteren de adjacentiematrix van Γ als A. Dan is $A\mathbf{1} = \vec{b}$ met $\vec{b} = (b_i)$ en $b_i = \deg(i)$. Met andere woorden, de vector $\vec{b}$ is de vector uit $\mathbb{R}^n$ met op positie i de graad van top i.

Reguliere grafen en eigenvectoren

Definitie 4.1.6

Een graaf is regulier als alle toppen dezelfde graad hebben. Een k-reguliere graaf is een graaf waarvan alle toppen graad $k > 0$ hebben.

Reguliere grafen en eigenvectoren

Definitie 4.1.6

Een graaf is regulier als alle toppen dezelfde graad hebben. Een k-reguliere graaf is een graaf waarvan alle toppen graad $k > 0$ hebben.

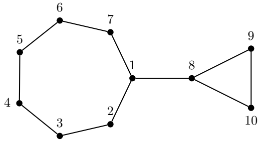
Gevolg 4.1.8

Een enkelvoudige graaf met adjacentiematrix A is k-regulier als en slechts als $\mathbf{1}$ een eigenvector is van A met eigenwaarde k.

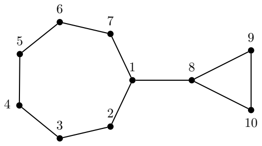
Graad- en Laplacematrix

Definitie 4.1.10

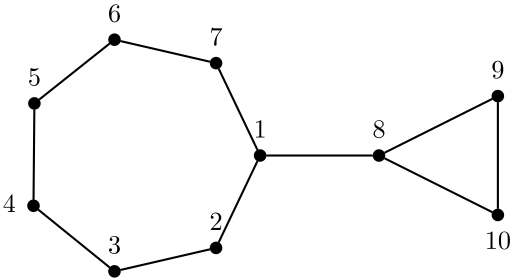
Veronderstel dat Γ een enkelvoudige graaf is op n toppen. De *graadmatrix van* Γ is de matrix $D = (d_{ij})$ waarvoor $d_{ii} = \deg(i)$ en $d_{ij} = 0$ als $i \neq j$. De *Laplacematrix van* Γ is de matrix $L = D - A$, met A de adjacentiematrix van Γ.



$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Oefening 4.1.11

Beschouw de vier grafen K_4, C_3, P_3 en de bovenstaande graaf. Bepaal voor elke van deze grafen het product van hun Laplacematrix met de all-one vector. Wat valt je op?

$$K_4\colon \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{1}$$

$$C_3\colon \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3\colon \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Graad- en Laplacematrix

We noteren de *all-one vector* als $\mathbf{1}$.

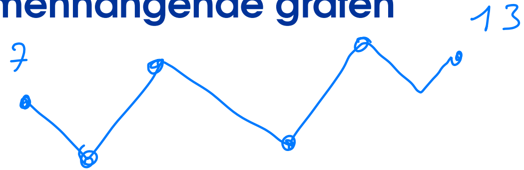
Graad- en Laplacematrix

We noteren de *all-one vector* als $\mathbf{1}$.

Stelling 4.2.12

Veronderstel dat Γ een enkelvoudige, ongerichte graaf is op $n > 0$ toppen. Dan is $\mathbf{1}$ een eigenvector van de Laplacematrix van Γ met eigenwaarde 0.

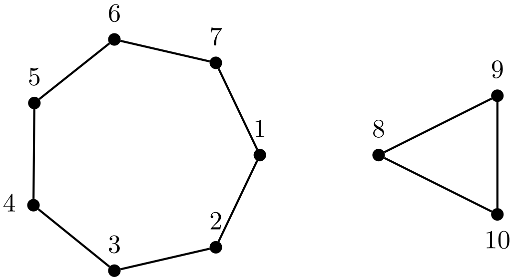
Samenhangende grafen



Definitie

Een enkelvoudige graaf is *samenhangend* als er voor elk paar toppen *u* en *v* een pad bestaat tussen *u* en *v*. Een graaf die niet samenhangend is, bestaat uit verschillende *samenhangscomponenten*. Tussen elke twee samenhangscomponenten bestaan er geen bogen.

Onsamenhangende graaf: voorbeeld



Laplacematrix van (on)samenhangende grafen

Stelling

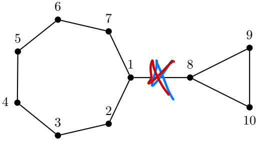
Veronderstel dat Γ een samenhangende enkelvoudige graaf is. Dan heeft de eigenruimte van de Laplacematrix van Γ horend bij de eigenwaarde 0 dimensie 1.

Laplacematrix van (on)samenhangende grafen

Gevolg

Het aantal samenhangende componenten van een enkelvoudige graaf is gelijk aan de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 0 van de Laplacematrix.

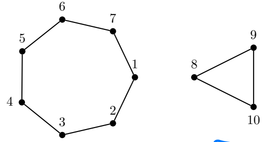
Laplacematrix van (on)samenhangende grafen



$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van (on)samenhangende grafen

Γ_1 Γ_2



L_1

$$L = \left(\begin{array}{ccccccc|ccc}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2
\end{array}\right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

L_2

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{pmatrix}
=
$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Laplacematrix van een onsamenhangende graaf

De vectoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$ zijn *lineair onafhankelijk*. De *meetkundige dimensie* van 0 als eigenwaarde van L is 2.

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Daaruit volgt dat twee eigenvectoren van de Laplacematrix met een *verschillende* eigenwaarde, staan loodrecht op elkaar!

Eigenwaarden van de Laplacematrix

Stelling

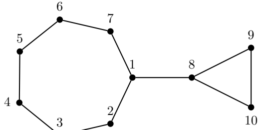
Er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren van de Laplacematrix.

Daaruit volgt dat twee eigenvectoren van de Laplacematrix met een *verschillende* eigenwaarde, staan loodrecht op elkaar!

Gevolg

De tweede kleinste eigenwaarde van de Laplacematrix van een samenhangende ongerichte graaf is verschillend van 0 en elke bijhorende eigenvector staat loodrecht op de all-one vector.

Fiedlervector en graph cut



$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

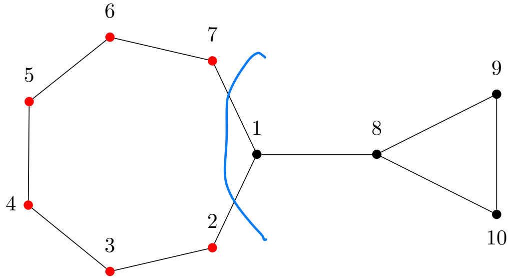
De eigenwaarden van L zijn 0, 0.2375, 0.7530, 1.0, 2.4450, 2.5633, 3.0, 3.4832, 3.8019 en 4.7159. Een Fiedlervector van lengte 1 is

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.0521 \\ -0.1147 \\ -0.2543 \\ -0.3335 \\ -0.3335 \\ -0.2543 \\ -0.1147 \\ 0.3734 \\ 0.4897 \\ 0.4897 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

We kunnen een Fiedlervector gebruiken om een zogenaamde **graph cut** te bekomen: een partitie van de toppen in twee verzamelingen waartussen het aantal bogen “klein” is.

Fiedlervector en graph cut



$$\begin{pmatrix} 0.0521 \\ -0.1147 \\ -0.2543 \\ -0.3335 \\ -0.3335 \\ -0.2543 \\ -0.1147 \\ 0.3734 \\ 0.4897 \\ 0.4897 \end{pmatrix}$$

Fiedlervector en graph cut

De tweede kleinste eigenwaarde van de Laplacematrix is een maat voor de “connectiviteit” van de graaf.

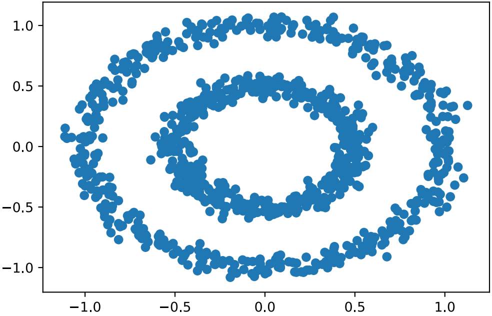
De similarity graph van een dataset

- We associëren een **gewogen, ongerichte en complete graaf** aan een dataverzameling.
- De toppen zijn de datapunten
- Het gewicht van een boog is een getal tussen dat bepaalt hoe sterk twee datapunten op elkaar lijken.

De similarity graph van data

- Noteer het gewicht van de boog die toppen i en j verbindt als $w(i,j)$.
- De adjacentiematrix definiëren we als $a_{ij} = w(i,j)$.
- De graad van top i wordt dan $\mathrm{deg}(i) = \sum_j w(i,j)$.
- De Laplacematrix blijft $L = D - A$, en zijn eigenschappen veranderen niet!

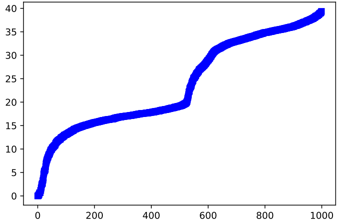
De similarity graph van data



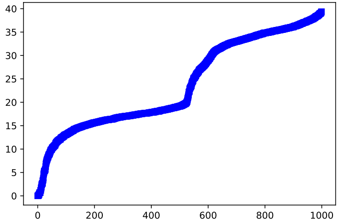
De similarity graph van data

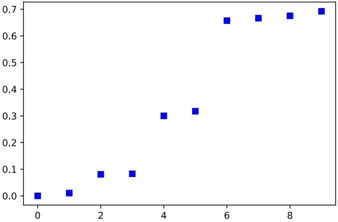
- $w(i,j) = e^{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}}$
- We verwachten dat er een sprong te zien is tussen de tweede kleinste en derde kleinste eigenwaarde van L.

De similarity graph van data



De similarity graph van data



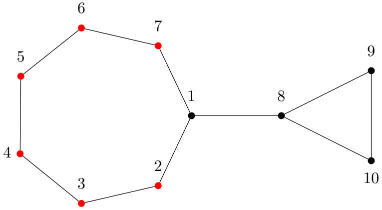


Spectrale clustering van data

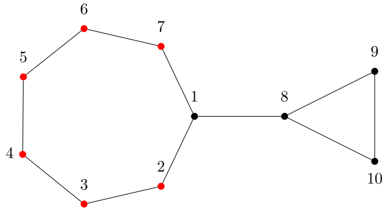
1. Bepaal de gewogen Laplacematrix L van de similarity graph.
2. Bepaal de k kleinste eigenwaarden van L
3. Gebruik de bijhorende eigenvectoren als kolommen van een matrix U
4. Pas het k-means algoritme toe op de **rijen** van de matrix U.

   Dit levert een partitie van de toppen in k verzamelingen.

Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data

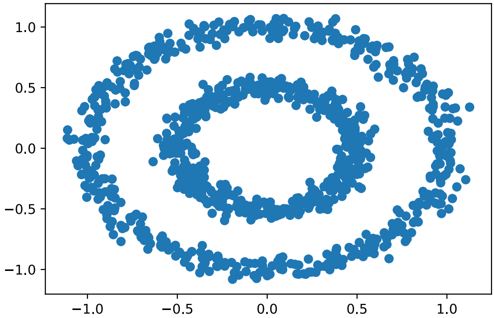


$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0521 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix}$$

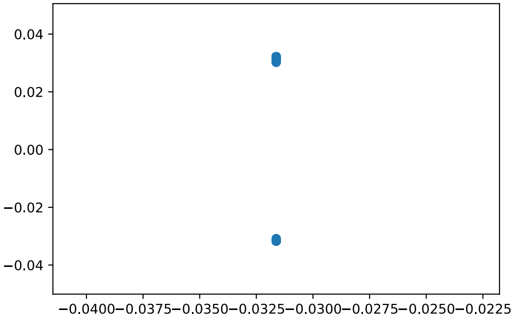
Spectrale clustering van data

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0521 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.1147 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.3335 \\ 1 & -0.2543 \\ 1 & -0.1147 \\ 1 & 0.0521 \\ 1 & 0.3734 \\ 1 & 0.4897 \\ 1 & 0.4897 \end{pmatrix}$$

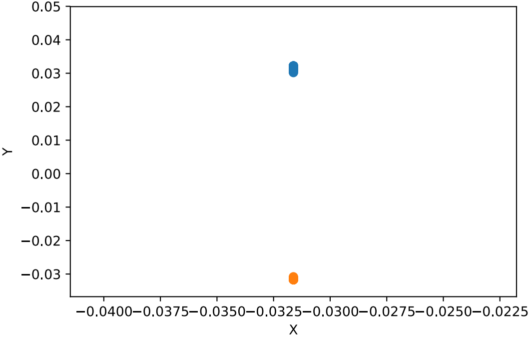
Spectrale clustering van data



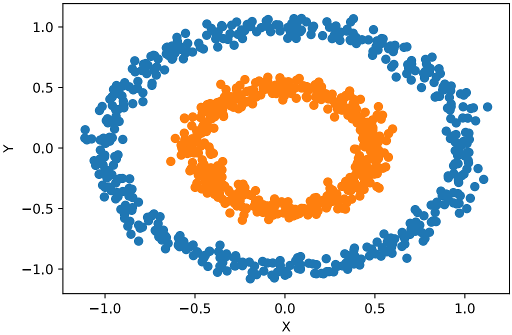
Spectrale clustering van data



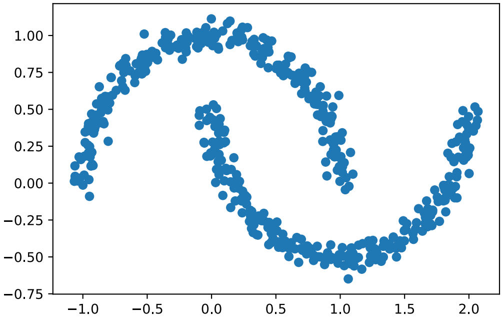
Spectrale clustering van data



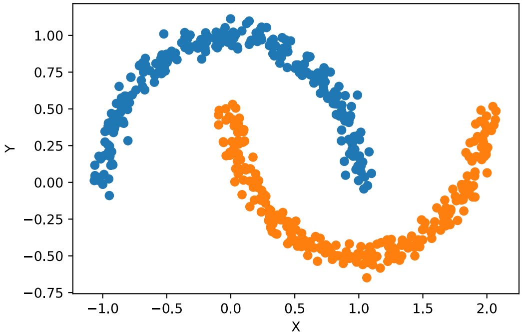
Spectrale clustering van data



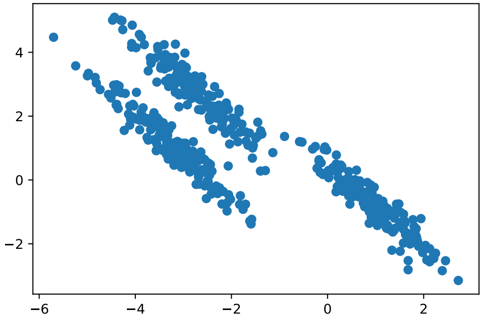
Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data

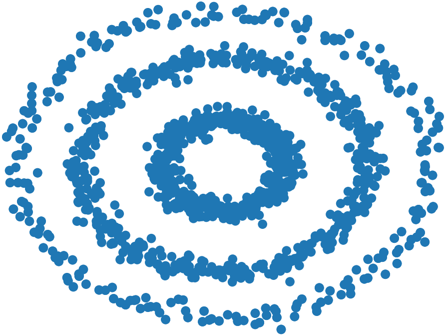


Spectrale clustering van data

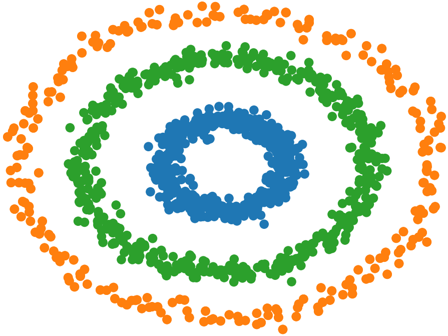


Spectrale clustering van data

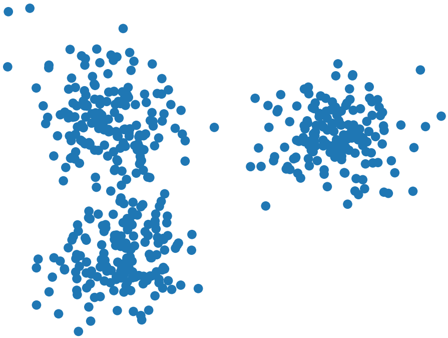
Spectrale clustering van data



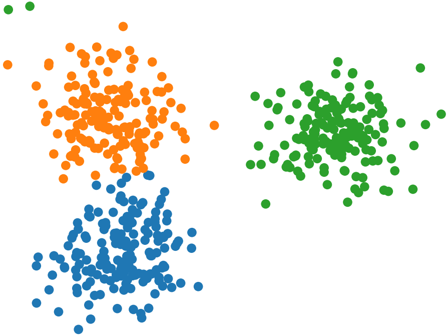
Spectrale clustering van data



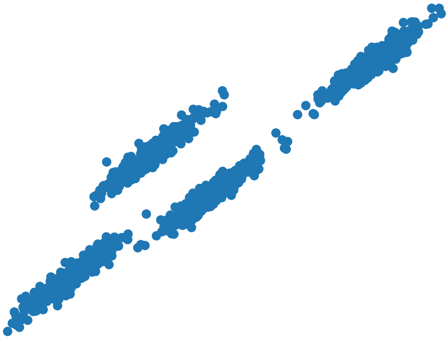
Spectrale clustering van data



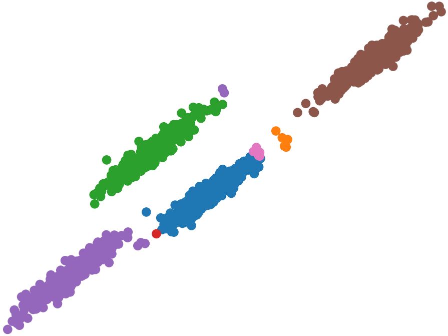
Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data



Spectrale clustering van data



Fundamentele vs. Toegepaste wiskunde

Is er nog fundamentele wiskunde nodig?

Fundamentele vs. Toegepaste wiskunde

When it's advanced, any topic becomes mathematical. Whether it's economics, social science, psychology, anything I can think of, ultimately, will be mathematical

(Lek-Heng Lim)

Fundamentele vs. Toegepaste wiskunde

When it's advanced, any topic becomes mathematical. Whether it's economics, social science, psychology, anything I can think of, ultimately, will be mathematical

(Lek-Heng Lim)

Lek-Heng Lim zoekt oplossingen voor problemen in het domein machine learning door fundamentele wiskunde, zoals algebra, meetkunde en topologie te gebruiken

`https://www.quantamagazine.org/`

`an-applied-mathematician-strengthens-ai-with-pure-math-20230301/`

Zuiver toegepaste zuivere wiskunde

- Moderne toepassingen zijn niet mogelijk zonder een grondige kennis van fundamentele wiskunde: analyse, algebra, meetkunde, discrete wiskunde, topologie, statistiek, ...
- De toegepaste wiskunde ontwikkelt en onderzoekt wiskunde met als doel ze toe te passen, hand in hand met het onderzoek in de zuivere wiskunde. De zuivere wiskunde onderzoekt wiskunde met als doel ze beter te begrijpen.
- Elke opleiding wiskunde bestaat dan ook uit fundamentele én toegepaste wiskunde. Studenten kiezen zelf hoever ze in elk van de richtingen willen gaan.
- Elke opleiding wiskunde is breed, ze heeft ook aandacht voor de *toepassingsgebieden* zelf, b.v. data science, maar ook fysica, computerwetenschappen, etc.

Waarom wiskunde studeren ...

- Als je graag wiskunde doet,
- omdat je het een leuke uitdaging vindt om wiskundige problemen aan te pakken...
- als je gedreven bent om die abstracte structuren en wiskundige stellingen te begrijpen...
- als je wil weten wat er aan de basis ligt van de wereld rondom ons
- Als je deel wil uitmaken van de oplossing van maatschappelijke problemen.

Wiskunde is overal

Skills!

- Afgestudeerde wiskundigen worden aangeworven omwille van hun vaardigheden
- *Het netwerk gedraagt zich op een bepaalde manier. Bij telenet gaan we daarin op zoek naar patronen. Daarvoor hebben we wiskundigen en data scientists nodig. (Dieter Platel, ingenieur en schakelstudent wiskunde, Telenet)*
- *Bij AtlasCopco beschikken ze over heel veel data, en ze zijn nu pas begonnen om deze op een meer wiskundige wijze te analyseren (Lynn Boen, alumna)*

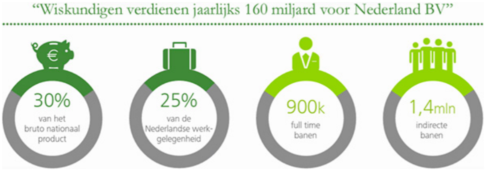
Jobs, jobs, jobs!

- Wiskundigen kunnen in uiteenlopende sectoren en bedrijven aan de slag, omwille van hun analytische skills en probleemoplossend vermogen.
- Financiële sector: heel veel verschillende jobs: data-analyse, risico-analyse, audits, actuariële functies, ...
- Industriële sector: bedrijven zoals Agfa-Gevaert, Materialise (medische beeldvorming en apparatuur), IBM (Quantum computing e.a.), Robovision (AI toepassingen) ...
- IT sector: functionele analyse en ontwikkeling van software (Colruyt) of AmpliData (digital storage), ...
- Consultancy: algemene bedrijfsproblemen oplossen, zoals Conundra (supply chain management), EORTC (klinische consultancy, onderzoek naar behandeling tegen kanker)...
- Onderwijs: **gi-gan-tisch** tekort aan leerkrachten wiskunde!

Kan je wel (genoeg) geld verdienen als wiskundige?

Het gemiddelde salaris van een master wiskunde in België is **hoger** dan dat van een fysicus, scheikundige én ingenieur!
Bron: `https://www.stepstone.be/carriere-tips/de-8-bestbetaalde-jobs-ons-land/`

Kan je wel (genoeg) geld verdienen als wiskundige?



Bron: https://www.consultancy.nl/nieuws/8220/deloitte-groot-tekort-betaspecialisten-bedreigt-economie

https://platformwiskunde.nl/rapport-deloitte/

Geld is niet het enige wat telt!

JAN BOGAERTS

Werkgever/bedrijf: European Organization for Research and Treatment of Cancer (EORTC)

Website bedrijf: www.eortc.org

Functie: Scientific Advisor

Domein: Geneeskunde & kankeronderzoek

WISKUNDIG TALENT MET IMPACT OP KANKERONDERZOEK

Waarom koos je voor deze opleiding?

In het hoger middelbaar had ik een sterke interesse in wiskunde ontwikkeld. Sommige leraren vonden dat ik burgerlijk ingenieur zou moeten doen, maar ik koos liever wiskunde.

Wat was je eerste job na het behalen van je diploma?

Ik ben begonnen als assistent in wiskunde en statistiek voor de faculteiten Economie, Sociale en Politieke Wetenschappen, en de Faculteit Wetenschappen. In 1993 begon ik bij Bristol-

JOBS VOOR WISKUNDIGEN

VAN WETENSCHAP TOT TECHNOLOGIE: WISKUNDE IS JOUW TICKET NAAR TOPJOBS

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

© Thierry Geenen

INHOUDSTAFEL

GEBRUIK JE VERSTAND...

TINE VAN DYCK, P. 6: Voornamelijk de analytische en kritische geest die in de wiskundeopleiding sterk gevoed wordt. Ook creativiteit en probleemoplossend denken, wat helpt om dingen vanuit verschillende invalshoeken te kunnen bekijken.

EVA VANDERSMISSEN, P. 32: Ik leerde om problemen grondig te analyseren en op te splitsen in beheersbare onderdelen. Dit helpt me om complexe problemen te doorgronden en effectieve, zo simpel mogelijke, oplossingen te vinden. Zowel in mijn werk met AI-toepassingen als in andere gebieden.

SVEN VAN SEGBROEK, P. 26: Mijn wiskundige achtergrond helpt me om tastbare toepassingen te maken met een maatschappelijke impact.

JENTE BOSMANS, P. 16: Wanneer ik voor mijn werk bijvoorbeeld wetenschappelijke artikels lees over AI en machine learning komt mijn wiskunde-achtergrond goed van pas. Ook in het dagelijks leven komt kritisch denken goed van pas. De reflex om eerst iets goed te doorgronden en volledig te begrijpen vooraleer ik beslissingen neem, heb ik ook aan mijn wiskundeopleiding overgehouden.

GILLES INGHELBRECHT, P. 30: De complexe problemen in business analytics zijn met behulp van abstractie terug te brengen tot wiskundige probleemstellingen. In de opleiding Wiskunde & Data Science krijg je niet alleen de tools aangeleerd om deze probleemstellingen op te lossen, je ontwikkelt ook gaandeweg het abstractievermogen om deze tools breed en creatief toe te passen.

KAREN VAN OPDENBOSCH, P. 18: Mijn studie heeft me vaardigheden bijgebracht zoals oog voor detail, analytisch denken en logisch redeneren, die ik dagelijks toepas in mijn werk.

EN VOLG JE

Geld is niet het enige wat telt!

Integrale brochure *Jobs voor Wiskundigen* is beschikbaar online

https://issuu.com/vubrussel/docs/brochure_jobuitwegen_wiskunde